

Софийски университет “Св. Климент Охридски”
Физически факултет
Катедра “Астрономия”

КОСМОЛОГИЯ

(избирам курс за бакалаври)

доц. д-р Тодор Велчев

София, 2015

Съдържание

1 Едромащабна структура на Вселената	7
1.1 Далечни радиоизточници. Квазари	7
1.2 Купове и свръхкупове от галактики.	9
1.3 Структури на най-голям машаб	11
2 Космологични разстояния. Наблюдения на “стандартни свещи”.	14
2.1 Първични “свещи”	15
2.2 Вторични “свещи”	18
3 Наблюдателни основи на съвременната космология	21
3.1 Парадокс на Олберс	21
3.2 Космологичен принцип: изотропия и хомогенност	23
3.3 Закон на Хъбъл	23
3.4 Видове частици	26
3.5 Фоново микровълново лъчение	28
4 Нютонова космология. Възможни модели на Вселената.	31
4.1 “Прахов” модел на Вселената без налягане	31
4.2 “Прахов” модел на Вселената с налягане	40
5 Релативистична космология. Динамика на Вселената	42
5.1 Кривина на пространството и метрика	42
5.2 Уравнение на Фридман	44
5.3 Уравнение на ускорението	47
5.4 Уравнения на състоянието	48
5.5 Космологична константа	49
6 Стандартен космологичен модел	52
6.1 Вселени с единствена компонента	52
6.2 Вселени с много компоненти	57

6.3 “Модел на котния знак”	65
7 Космологични епохи и космологичен нуклеосинтез	68
7.1 Космологични епохи в ранната Вселена	68
7.2 Съотношение протони-неutronи	72
7.3 Синтез на деутерий и на по-тежки ядра	75
Приложение А: Използвани съкращения	77
Приложение Б: Кратка хронология на космологията	79

Списък на фигури

1.1	Структура на извънгалактичния радиоизточник Cygnus A.	8
1.2	Едромащабна структура на видимото вещество.	12
2.1	Класическите цефеиди като стандартни свещи.	16
2.2	Ефект на Сюняев-Зелдович.	17
2.3	Функции на светимост на PNe в галактиката M 31.	19
2.4	Сътношение на Тули-Фишер за различни извадки от галактики.	20
3.1	Закон на Хъбъл по извадка от близки галактики.	24
3.2	Схема на раздалечаващи се галактики.	25
3.3	Спектър на СМВ, получен от мисията COBE.	29
4.1	Съпътстваща координатна система.	34
4.2	Еволюция на мащабния фактор в три типа “прахова” Вселена.	38
4.3	Възраст на “прахова” Вселена като функция от Ω_0	39
5.1	Пространства с различна кривина.	43
6.1	Еволюция на вселени с една компонента.	57
6.2	Еволюция на вселена с кривина, съдържаща само вещество.	60
6.3	Еволюция на плоска вселена с вещество и космологична константа.	62
6.4	Типове вселени с вещество и космологична константа.	64
6.5	Еволюция на мащабния фактор в Стандартния модел.	67
6.6	Зависимост на действителното разстояние и на времето назад от червеното отместване в Стандартния модел.	67
7.1	Еволюция и “замръзване” на отношението n_n/n_p	74
7.2	Масови съдържания на изотопи в епохата на космологичен нуклеосинтез.	78

Списък на таблиците

1.1	Извадка от най-близките купове от галактики.	10
3.1	Някои частици от Стандартния модел със значение в космологията.	26
4.1	Оценки на Ω_0 по различни наблюдателни методи.	36
6.1	Пространствено плоски вселени с една компонента.	56
6.2	Основни параметри на стандартния “модел на котния знак”.	66
7.1	Космологични епохи в ранната Вселена.	72

УВОД

Когато се говори за космология, трябва да се имат предвид различните значения на това понятие. В различните философски и религиозни системи, то означава учение за произхода на Вселената или на всичко съществуващо, устроено според определени закони (*kosmos*). Наистина, един сериозен и систематичен светоглед трябва да предложи съответното обяснение за възникването на всичко съществуващо, в частност на материалния свят. Но докато отговорът на древния въпрос “Защо изобщо съществува нещо, вместо да не съществува нищо?” остава и ще остане в полето на философията и религията, възникването на Вселената (поне от определен ранен етап насетне) и нейната еволюция могат да се опишат със средствата на съвременната наука. Така второто значение на понятието *космология* е наука за Вселената, разглеждана като едно цяло, за нейната еволюция и едромащабна структура.

Майка на тази наука е, естествено, астрономията, подкрепена от фундаменталните физични теории като Теорията на относителността и квантовата теория на полето. Възможността изобщо да се развие космологията като физическа наука почива на развитието на извънгалактичната астрономия, т.е. на възможността да се изучават обекти извън нашата Галактика. Съвременните астрономически инструменти и методи позволяват изследването на динамиката и на физическите процеси в обекти, намиращи се на разстояния от милиарди светлинни години. Периодите от време, необходими на електромагнитното лъчение да ги преодолее, се оказват съпоставими с възрастта на Вселената. Следователно, ние вече реално сме в състояние да надникнем в нейния “детски период”.

Този курс предлага сбит преглед на съвременната космология. Той е предназначен за студенти, които искат да получат магистърска степен по специалността “Астрономия и астрофизика” и които не са посещавали курс по космология в хода на досегашното си обучение. За усвояване на учебния материал са необходими основни познания по термодинамика, квантова механика, атомна и ядрена физика и теория на относителността. В уводната част се прави преглед на наблюдателните основи на съвременната космология, с ударение върху потвържденията на теорията на Големия взрив. Въвеждат се различните възможни модели на Вселената в нютоново

и релативистично разглеждане. Втората част на курса е посветена на стандартния космологичен модел и на неговите ревизии: тъмно вещество, тъмна енергия, инфлационен стадий.

Глава 1

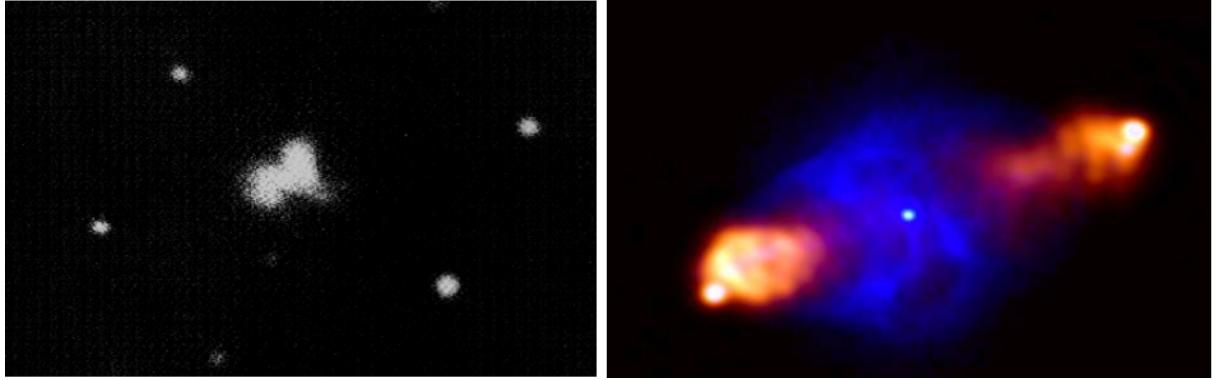
Едромащабна структура на Вселената

1.1 Далечни радиоизточници. Квазари

Първата реална възможност за детайлно изучаване на далечната (ранната) Вселена се отваря с напредъка на радиоастрономията. Той води до откриването на мощни радиоизточници извън Галактиката, които – както ще видим по-нататък – могат да служат като полезни реперни обекти за изучаване на структурата на Вселената. Първият подобен извънгалактичен радиоизточник Cygnus A ($D \sim 210$ Mpc) е открит от J. S. Hey, S. J. Parsons и J. W. Phillips през 1946. След уточняване на положението му на небето, W. Baade (Mt Wilson) и R. Minkowski (Palomar) забелязват на оптическото изображение на този район структура¹, подобна на двойка от сблъскващи се галактики (Фиг. 1.1). Така се ражда хипотезата, че радиоизточниците възникват при сблъсъци между галактики. Изследванията с голяма резолюция ($\gtrsim 1''$), с помощта на интерферометрия с много голяма база, показват, че подобна картина е налице не само при Cygnus A, но и при мнозинството извънгалактични радиоизточници. Наблюдава се двойка от струи или от сфероидални обекти, разположени симетрично спрямо централната зона на източника, в която очевидно противча мащабен процес с отделяне на голяма енергия, задвижваща струите. Радиоизлъчването е нетоплинно по характер и се генерира чрез синхротронния механизъм, при ускорение на бързи електрони в магнитно поле. Характерът на централната експлозия, довела до отделянето на тези частици, дълго време е предмет на дебати. F. Hoyle и W. Fowler предлагат като сценарий колапс на масивен обект, при който гравитационната енергия се превръща в кинетична енергия на електроните. Обаче потенциалната енергия на двойка сблъскващи се галактики се оказва доста по-малка от необходимите $10^{58} - 10^{62}$ erg за поддържане на радиоизточника. По този начин първоначалната хипотеза е опровергана. От края на 70-те години на XX век започва да се налага

¹Такава процедура в астрономията се нарича оптично отвъждествяване на радиоизточник.

виждането, понастоящем подкрепено и от много наблюдателни изследвания, че централният обект в такива извънгалактични радиоизточници е свръхмасивна черна дупка (SuperMassive Black Hole, SMBH) с маси $10^6 - 10^8 M_\odot$.



Фигура 1.1: Структура на извънгалактичния радиоизточник Cygnus A. *Вляво:* Оптично изображение на района; Cygnus A е по средата. *Вдясно:* Изображение на вътрешната зона на източника по данни от LOFAR. Виждат се два “радиоснаряда” (lobes), породени от струи високоенергетични частици, излизящи от централния източник. Разстоянието между тези зони е около 60 кpc.

Извънгалактични радиоизточници, които изглеждат като звезди на оптичните изображения (ъглови размери под $10''$), са получили наименованието *квазари*, което е съкращение от “квазизвезден радиоизточник”. През 1963 г. M. Schmidt установява, че спектърът им съдържа широки емисионни линии. По тази причина първоначално се смята, че става дума за хладни радиозвезди в нашата Галактика. По-детайлният анализ показва, че линиите са от Балмеровата серия на водорода и на Mg II, но са силно изместени към червената част на спектъра. Ако дефинираме червеното отместване z :

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} , \quad (1.1)$$

където λ_0 и λ са съответно лабораторната и измерената дължина на вълната, от спектрите на първите регистрирани квазари са получени $0.15 \lesssim z \lesssim 0.4$: съществено по-големи стойности от червените отмествания на звезди от Галактиката с типични $z < 10^{-3}$. Най-правдоподобното обяснение е, че това е следствие от разширението на Вселената. В такъв случай квазарите трябва да бъдат много далечни обекти и фактът, че могат да се възприемат като звезди, въпреки голямото разстояние до тях, говори за огромната им светимост. Всъщност, те са най-мощните източници на електромагнитно лъчение във Вселената, с $L = 10^{13} - 10^{14} L_\odot$. При това излъчването им далеч не е само в радиодиапазона. Всъщност се оказва, че от познатите ни днес около 90 000 квазари само около 5% са радиоизточници. В огромен брой случай

те излъчват най-вече в рентгеновия диапазон. Затова понастоящем се предпочита обозначението им “квазизвезден обект” (QSO).

Излъчването на много квазари се отличава със силна нестационарност, с характерни периоди T от седмици или месеци. Този факт поставя ограничението $cT < 1$ pc на физическите размери на тези обекти. Тези размери са много по-малки от ядрата на галактиките и са сравними с разстоянията между близки звезди! Затова днес квазарите са включени в обединения модел на активните галактични ядра (Active Galactic Nuclei, AGN), които имат много по-голяма инфрачервена, оптична, ултравиолетова, рентгенова и гама-светимост в сравнение със звездните ядра на нормалните галактики. Обикновено AGN се разделят на два класа²: радио-тихи (radio-quiet), с пренебрежим принос на струи и “снаряди” (lobes) към радиосветимостта, и радиошумни (radio-loud). В първия клас влизат областите на емисия от ядрото с ниска ионизация (low-ionization nuclear emission-line regions, LINERs), Сийфъртови галактики и радио-тихи квазари, а във втория: радио-шумни квазари, блазари (обекти от тип BL Lac) и радиогалактики.

1.2 Купове и свръхкупове от галактики.

Въпросът дали галактиките са разпределени равномерно в пространството е повдигнат още от Едуин Хъбъл (Edwin Hubble), който показва чрез своя пръв каталог от 400 “извънгалактични мъглявини” (1926 г.), че на големи мащаби Вселената е хомогенна. По-късно, използвайки по-голяма статистическа извадка, той забелязва, че на площи съглови размери $\lesssim 10^\circ$ броят галактики е по-голям от очаквания при произволно Поасоново разпределение, докато на по-големи мащаби извадката следва Гаусово разпределение. Това откритие слага началото на изследванията на иерархичната структура на видимото вещество.

Когато една галактика не е член на група или куп от галактики, тя се нарича *галактика от полето* (field galaxy). В по-честия случай, галактиките принадлежат на групи или купове, които съдържат от няколко до стотици големи члена. Млечният път, например, е член на група от около 20 галактики с разстояния помежду им до 1 Mpc, наречена *Местна група*. Най-близките ѝ членове ($D \sim 50$ kpc) са Големият и Малкият Магеланови облаци.

В Таблица 1.1 е дадена извадка от най-близките купове от галактики, като несигурността в оценките за разстоянието се дължи на несигурността в определянето на Хъбловата константа (вж. Част 3.3). Все пак тези числа ни дават надеждна оценка за относителните разстояния между куповете. В своя каталог G. Abell включва купове

² Класификацията нерядко е объркваща, защото отразява исторически факти относно откриването на обектите, а не реалната им физика.

с разстояния до това на Hydra II, като налага строги критерии за принадлежност към такава структура: контраст на плътността на членовете спрямо общата фонова плътност, характерни размери, диапазон на светимостта. При груба оценка на масата на един куп от галактики $\sim 10^{14} M_{\odot}$ и при предположение, че веществото във Вселената е съсредоточено в куповете от галактики, нейната средна плътност излиза около $10^{-30} \text{ g.cm}^{-3}$. Както ще видим по-късно обаче, тъмното вещество преобладава и в куповете от галактики и, следователно, тази оценка трябва да бъде завишена. От друга страна, средната плътност на веществото в една галактика е от порядъка на $10^{-24} \text{ g.cm}^{-3}$. Така обемът, зает от галактиките, е едва $\leq 10^{-6}$ от пълния обем на Вселената. По тази причина галактиките могат да се разглеждат като *точкови обекти при изграждането на космологични модели*.

Освен в оптичния диапазон, куповете от галактики излъчват мощно в радио- и в рентгеновия диапазон. Източници на това излъчване са не само индивидуални обекти; част от лъчението има дифузен характер и изпълва пространството във вътрешността на купа.

Таблица 1.1: Извадка от най-близките купове от галактики.

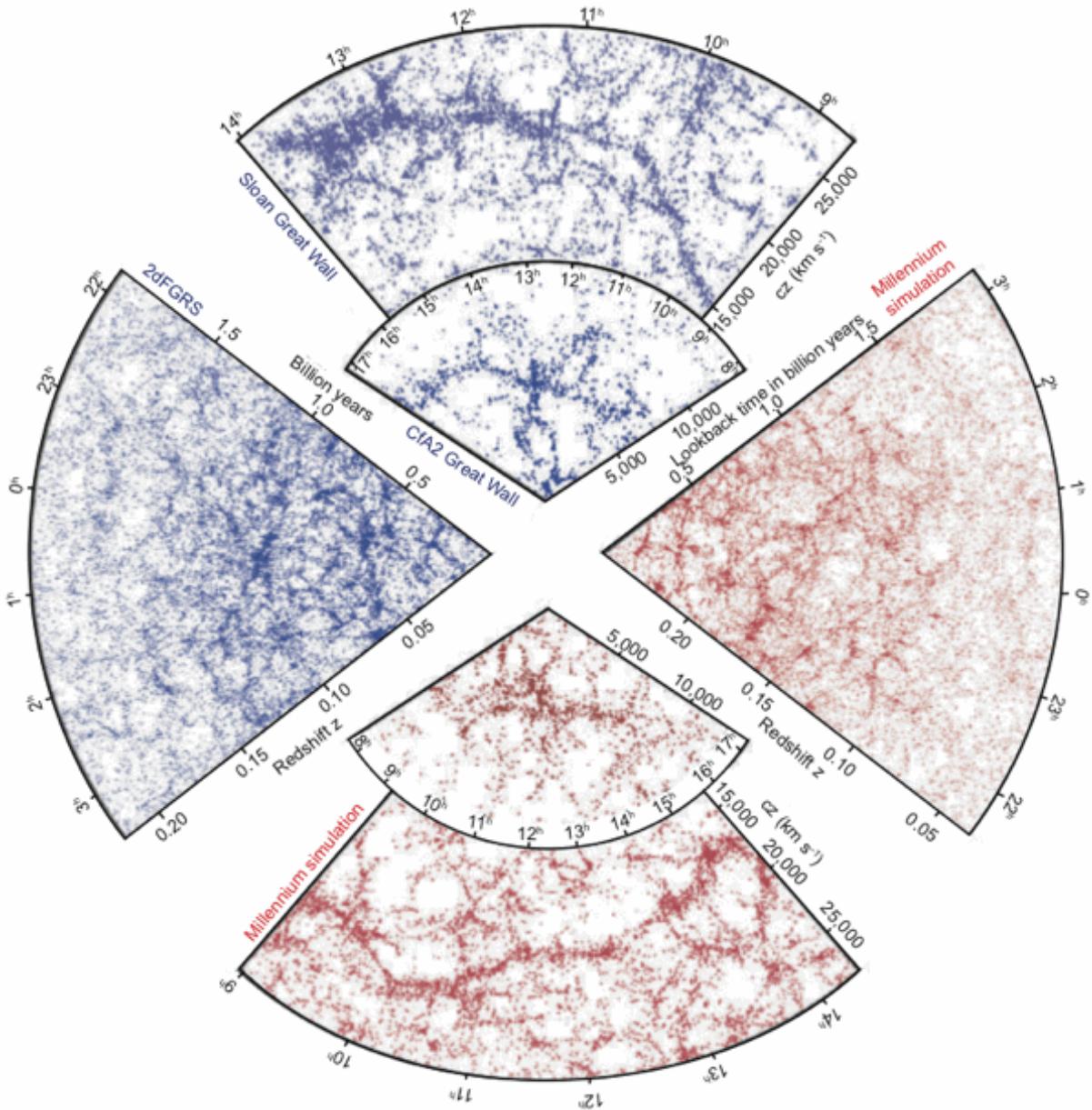
Номер по Abell	Екв. координати		z	Разстояние	Членство в свръхкуп
	RA 2000.0	DEC 2000.0		[Mpc]	
Virgo	12 29.6	+11 49	0.0037	52	Virgo
A3526	12 48.9	-41 18	0.0102	142	Centaurus
A3565	13 36.7	-33 58	0.0111	154	Centaurus
A1060	10 36.9	-27 32	0.0114	158	Hydra
A3627	16 15.5	-60 54	0.0145	201	-
A3574	13 49.2	-30 18	0.0148	205	Centaurus
A262	01 52.8	+36 09	0.0151	209	Perseus-Pisces
A3742	21 06.7	-47 09	0.0152	211	Pavo-Indus
A426	03 18.6	+41 31	0.0167	231	Perseus-Pisces
A194	01 25.6	-01 30	0.0168	233	-
A347	02 25.8	+41 52	0.0172	238	Perseus-Pisces
A3656	20 00.5	-38 32	0.0178	246	Pavo-Indus
A3698	20 36.0	-25 17	0.0188	260	Pavo-Indus
A569	07 09.2	+48 37	0.0189	262	-
A1367	11 44.5	+19 50	0.0208	288	Coma
A779	09 19.8	+33 46	0.0217	300	-
A3581	14 07.5	-27 01	0.0218	301	Centaurus
A1656	12 59.8	+27 59	0.0219	303	Coma
A2870	01 07.7	-46 55	0.0225	311	Phoenix
A400	02 57.6	+06 02	0.0232	320	-
A2877	01 09.8	-45 54	0.0235	324	Phoenix

В юерархията на извънгалактичните обекти са налице и по-големи обединения от галактики. Чрез търсене на някакво групиране на купове на по-големи пространствени мащаби е установено, че характерният размер на такива структури е ~ 50 Мpc, докато този на куповете е ~ 5 Мpc. Тези по-големи структури се наричат *свръхкупове от галактики*. Така например Вокульор (G. de Vaucouleurs) открива, че Местната група е член на свръхкуп, в чийто център е разположен купът Virgo.

1.3 Структури на най-голям мащаб

С напредъка на наблюдателната астрономия през последните десетилетия става възможно определянето на разстояния до далечни извънгалактични обекти и моделиране на пространственото разпределение на видимото вещество във Вселената. По съвременни данни, то изглежда така, както е показано на Фиг. 1.2. Различават се следните структури:

- Свръхкупове от галактики: Както вече отбелаяхме, те имат характерни размери $\gtrsim 50$ Мpc и няколко хиляди члена. Местният свръхкуп, например, е с формата на сплеснат елипсоид, чиято равнина на симетрия се нарича *свръхгалактична равнина* и преминава през центъра на купа Virgo и през центъра на нашата Галактика.
- “Празнини” (voids): Те обхващат пространствата между големите свръхкупове и имат характерни размери от порядъка на $100 - 200$ Мpc. В тях не се наблюдават галактики.
- “Великият атрактор” (Great Attractor) и “великата стена” (Great Wall): В края на 80-те години на XX век става явно, че галактиките от и в съседство с Местната група участват в едромащабен поток, насочен към свръхкупа Hydra-Centaurus в южното полукълбо. Типичната скорост в потока е около 600 km.s^{-1} , измерена спрямо отправна система, в която космическото микровълново лъчение (Cosmic Microwave Background, CMB) е изотропно. Смята се, че причината за това насочено движение е Великият атрактор: конгломерат от десетки хиляди галактики с общ обем $\sim 10^6$ Мpc 3 . Предполага се, че такива структури съществуват повсеместно във Вселената. Картiranето на Вселената на големи пространствени мащаби показва също съществуването на обширен (60×170 Мpc 2), но тънък слой вещество, получил името Великата стена. Нехомогенностите в строежа на Вселената като Великият атрактор и Великата стена са с размери около 10% от тези на видимата част на Вселената, наречена *Метагалактика* (~ 3000 Мpc).



Фигура 1.2: Едромащабна структура на видимото веществото във Вселената. *синьо*: по наблюдателни данни от 2dGRFS, Sloan DIgital Sky Survey и CfA2; *червено*: по данни от симулации (Millenium)

И така, едромащабната структура на Вселената се дефинира като нехомогенното разпределение на веществото на мащаби, по-големи от типичните размери на една галактика. Днешната Вселена има добре развита нелинейна структура във формата на хала на галактики, групи и купове на малки мащаби ($R < 10$ Mpc) и по-регулярен, квазилинейна структура на големи мащаби (стотици Mpc), представена от свръхкупове и “празнини”. Наблюдават се и различни преходни форми между нелинейната

и квазилинейната структура.

Преобладаващата теоретична парадигма в опитите за обяснение на едромащабната структура се състои в нейната еволюция от първоначални малки флуктуации на плътността на енергията в ранната Вселена, които са наложени върху гравитационния потенциал. Тези флуктуации могат да се регистрират като отклонения в температурата на СМВ и постепенно са нараснали чрез гравитационна неустойчивост, пораждайки структурите, които наблюдаваме днес. Физическите характеристики на едромащабната структура (размери, плътности, пространствено разпределение) зависят от параметрите на космологичните модели, които ще разгледаме по-нататък, а също от физиката на образуването и еволюцията на галактиките. Оттук идва и значението на познаването на едромащабната структура на Вселената не само за космологията, но и за извънгалактичната астрономия.

Глава 2

Космологични разстояния. Наблюдения на “стандартни свещи”.

Определянето на разстоянията до извънгалактичните източници е била и остава важна задача на наблюдателната космология. Основен и независим от възприетите космологични модели метод е използването на т. нар. “стандартни свещи”: клас от астрофизически обекти, чиято светимост L е добре известна или може да се определи благодарение на някаква тяхна физическа характеристика. Тогава разстоянието D_L до галактиката, в която е регистрирана такава *стандарна свещ* може да се определи по известната фотометрична формула:

$$D_L = 10^{\frac{m-M+25}{5}} \text{ [Mpc]} \quad (2.1)$$

където m и M са съответно видимата и абсолютната звездна величина, а екстинкцията по лъча на зрение е пренебрежима. В общо космологично разглеждане m зависи от червеното отместване z . При възприемане на съответен космологичен модел, горната формула се преобразува в израз, включващ негови параметри. (Вж. част ...)

Стандартните свещи се разделят според надеждността на оценката на D_L на *първични* и *вторични*. Някои първични свещи, използвани в космологията, са класическите цефеиди, свръхновите от тип Ia, ефектът на Сюняев-Зелдович, а някои от вторичните: функцията на светимост на планетарните мъглявини, отношението на Тули-Фишер, квазари, видими през гравитационни лещи. Ще ги разгледаме накратко.

2.1 Първични “свещи”

Класически цефеиди

Прототип на класическите цефеиди е звездата δ Серhei, откъдето и получават името си. Това са звезди-свръхгиганти или ярки гиганти, част от младото население на Галактичния диск и срещащи се често в разсеяни купове. Те се намират в еволюционен стадий на неустойчивост спрямо радиални пулсации с промяна на размера, светимостта и ефективната температура. Цефеидите се отличават с постоянни периоди Π , с продължителност от 1 до 70 денонаощия, които се определят лесно от анализ на характерната им крива на блясъка. Свойството, което ги превръща в стандартни свещи, е известното *съотношение “период-светимост”*¹, като стойността на коефициентите е уточнена след дългогодишни и многобройни наблюдения:

$$M \approx -3 \lg \Pi + \text{const}$$

$$M_V \approx -2.7 \lg \Pi - 1.6 , \quad (2.2)$$

където периодът се измерва в денонаощия. Това съотношение се изпълнява строго и затова цефеидите са сред най-важните и точни индикатори на разстоянието в близката Вселена. Високата им светимост $M_V > -6^m$ позволява определянето на разстояния D_L по цефеиди до ~ 20 Мpc.

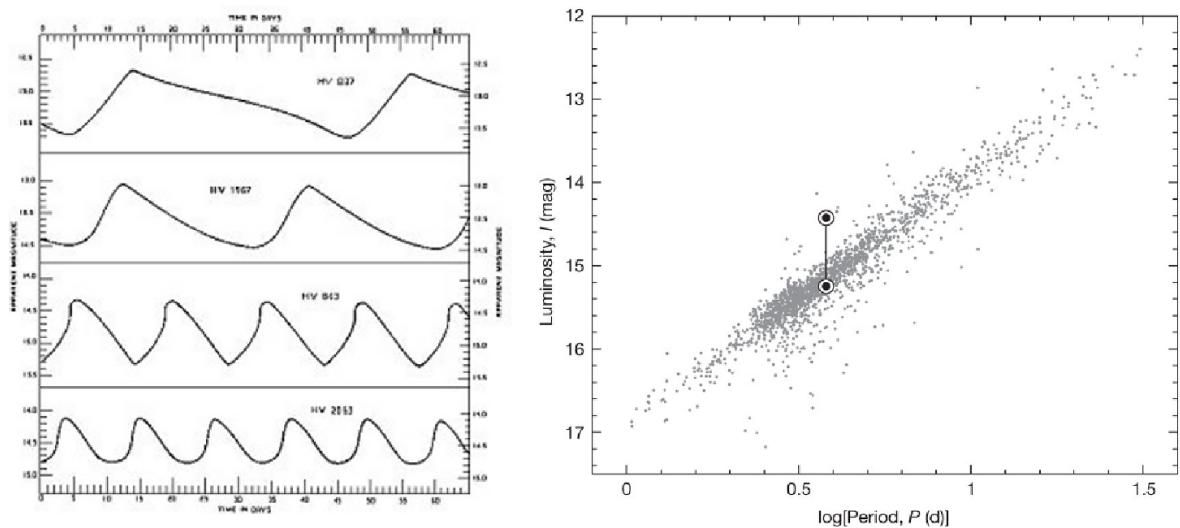
Свръхнови от тип Ia

Физическата причина за избухване на свръхнова от тип Ia (SN Ia) е акрецията на вещества върху бяло джудже в тясна двойна система или сливане на бели джуджета. В първия случай от масивния спътник, червен гигант, претича вещества, докато бялото джудже достигне критична маса за своето съществуване M_{Ch} , наречена *маса на Чандрасекар*². Следва бърза контракция и бързо изразходване на ядреното гориво, водещо до експлозия. Отделената при експлозията енергия е приблизително едно и също – всички регистрирани SN Ia достигат еднаква светимост в максимума си: $M = -19.33 \pm 0.25$. Затова те могат да се използват като стандартни свещи; стига да е измерена тяхната видима величина в максимума.

Обектите SN Ia са и много по-ярки от останалите стандартни свещи и могат да се наблюдават на големи космологични разстояния. Както ще видим по-късно, това ги

¹ Открито от Хенриета Ливит през 1917 г. и използвано от Едуин Хъбъл през 1925 г., за да покаже, че мъглявината Андромеда всъщност е друга галактика.

² Това е масата, под която изроденият електронен газ може да поддържа хидростатично равновесие срещу гравитационните сили.



Фигура 2.1: Класическите цефеиди като стандартни свещи. *Вляво:* Криви на блъсъка на цефеиди с различни периоди; *Вдясно:* Съотношение период-светимост по данни от каталога OGLE-III за цефеиди в Големия Магеланов облак (Soszynski et al. 2008)

прави особено важни за точно определяне на скоростта на разширение на Вселената и, оттук, за нейното физическо състояние (отворена или затворена Вселена). Благодарение на техни прецизни измервания понастоящем е установено, че Вселената се разширява ускорително.

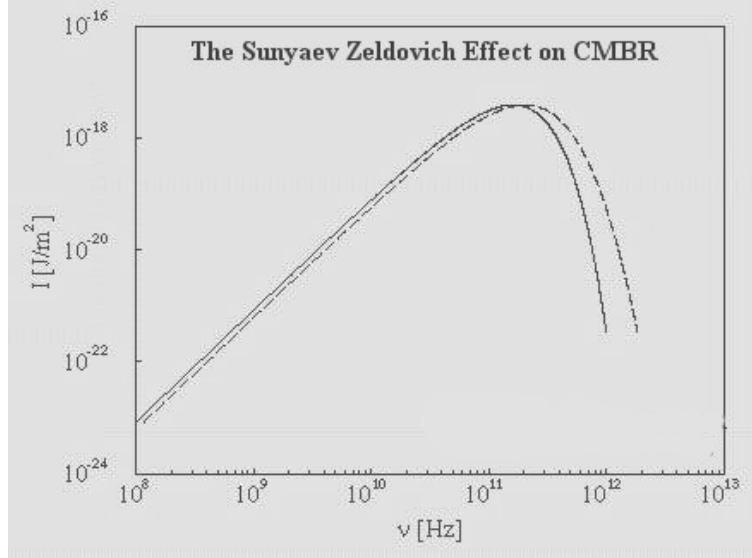
Ефект на Сюняев-Зелдович

Куповете от галактики включват и зони от горещ дифузен газ, наречени гореща междугалактична среда (InterGalactic Medium; IGM). Този газ излъчва в рентгеновия диапазон чрез механизма на спирачното лъчение (Bremsstrahlung). Рентгеновата светимост $L_X \propto \rho^2 l$, където ρ е плътността на газа, а l е размерът на купа. От друга страна, газът в купа екранира СМВ чрез обратно Комптъново разсейване върху бързи електрони, което води до увеличаване енергията на фоновите фотони, пропорционално на ρl . Сумарният ефект от двата процеса се състои в това, че купът е с по-малка светимост, когато се наблюдава на ниски честоти, но е по-ярък – на високи, в сравнение с микровълновия фон. Това обуславя промяна на формата на спектралното разпределение на енергията (Spectral Energy Distribution, SED) на СМВ по лъчна на зрение към галактичния куп, която е получила името *ефект на Сюняев-Зелдович* (Фиг. 2.2). Степента на изменение на SED зависи от три физически параметъра: кинетичната температура на електроните (наблюдателен параметър), електронната плътност ρ и диаметъра на газовата сфера l . Така рентгеновите и радионаблюдения

ни дават пряка оценка на l . Като вземем предвид и тъгловите размери на купа θ , можем да пресметнем разстоянието D до него по формулата:

$$D = l/\theta \quad (2.3)$$

Макар че основната идея за използването на ефекта на Сюняев-Зелдович като индикатор на разстоянието е доста просто, практическото ѝ приложение се натъква на трудности от теоретично и инструментално естество. Първо, предположението за хомогенна газова сфера е далеч от реалността. Междугалактичната среда е съсредоточена най-вече на дъното на потенциална яма, създадена от галактиките в купа, като противодействие на гравитацията се оказва от газовото налягане. Следователно, плътността на газа е най-голяма в центъра, при наличието на изявен градиент на налягането към повърхността. Към тази картина трябва да се добавят и механизмите на нагряване и охлаждане на газа. Отчитането на тези ефекти усложнява модела, без да обезмисля главната идея. Просто са необходими данни от рентгенови наблюдения, с резолюция, достатъчна за проявяване на строежа на газовата сфера. Инструментите, които понастоящем се използват за изследване на рентгенови купове, са Chandra X-ray observatory и Newton-XMM observatory. Те съчетават много добра пространствена резолюция с отлична спектрална резолюция. Най-голяма несигурност ($\sim 10\%$) имат измерванията на рентгеновия поток – тя е систематична по характер и произлиза от калибрирането на инструмента. Със съвременни телескопи, използвани за наблюдения на СМВ, тя спада до 2.5 %



Фигура 2.2: Ефект на Сюняев-Зелдович. С плътна линия е показан оригиналният спектър на СМВ, а с пунктир – след разсейването.

Въпреки тази несигурност, ефектът на Сюняев-Зелдович позволява определяне на разстояния до галактични купове и пресмятане на константата на Хъбъл: $H_0 = 56 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, за отворена вселена с плътност 0.3 от критичната. Това се различава слабо от оценката $H_0 = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, получена от изследвания на SN Ia, като разликата без съмнение е обусловена от систематични грешки. Затова тези стандартни свещи се ползват с най-голямо доверие от научната общност.

2.2 Вторични “свещи”

Функция на светимост на планетарни мъглявини

Планетарните мъглявини (Planetary Nebulae, PNe) представляват късна фаза на еволюция на звезди с малка маса, преминали стадия на гигантите. Младите планетарни мъглявини се оказват също удобни като стандартни свещи поради ефективната йонизация чрез лъчението на горещата централна звезда, водеща до линейни емисии в оптичния, инфрачервения и близкия UV диапазон. Всъщност, около 10% от потока на излъчване от млада PN се пада на единствена забранена линия: дублетът [O III] 5007 Å. Така може да се каже, че една планетарна мъглявина е специална космическа машина, трансформираща непрекъснатото излъчване в монохроматично.

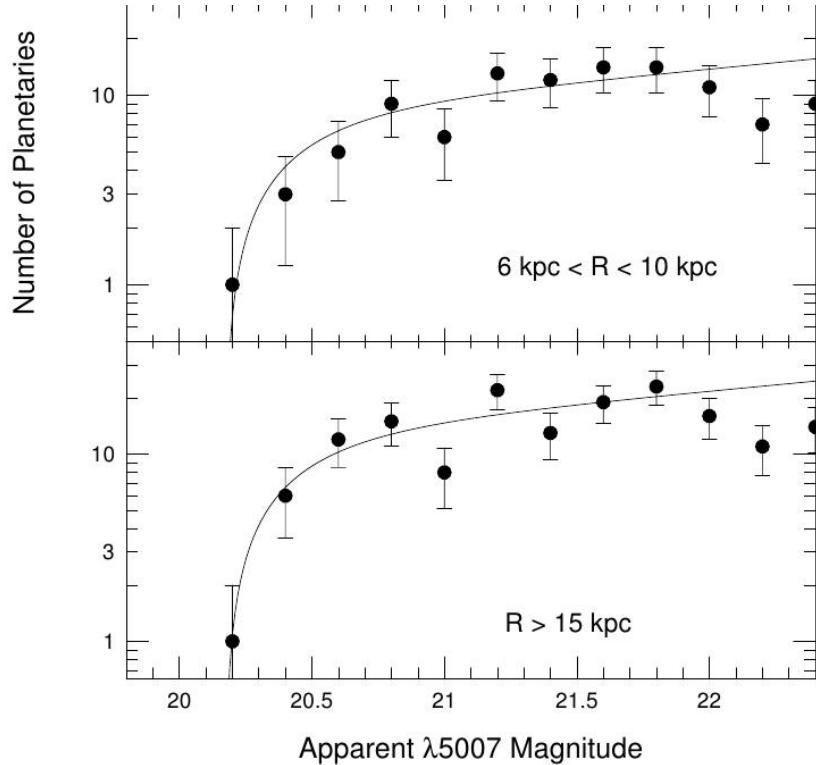
Методът за определяне на разстояния чрез PNe изисква съставяне на статистически пълна извадка от такива обекти и построяване на тяхната функция на светимост. После тази функция се апроксимира с емпирична функция от вида:

$$N(M) \propto \exp(0.307M) \left(1 - \exp(3(M_* - M))\right), \quad (2.4)$$

където M_* е абсолютната звездна величина на най-ярката мъглявина в извадката. С помощта на прецизно определеното, по класически цефеиди, разстояние до близката галактика M 31, както и с отчитане на екстинкцията по лъча на зрение, стойността на “светимостта на обрязване” е определена с добра точност: $M_* \simeq -4.48$. Така, ако получим видимата “величина на обрязване” m_* за дадена извадка от PNe, можем да пресметнем разстоянието до галактиката, в която се намират те (Фиг. 2.3). Все пак, въпреки усилията за точни калибровки, функцията на светимост на PNe си остава вторичен индикатор на разстоянието.

Съотношение на Тули-Фишер

През 1977 г. R. Brent Tully и J. Fisher показват съществуването на емпирично съотношение между пълната светимост на една спирална галактика и ширината на



Фигура 2.3: Функции на светимост на PNe в различни зони в галактиката M 31, зададени от галактоцентричния радиус R . Оценките за разстоянието се съгласуват с точност $\Delta m_* \sim 0.^m05$. (Ciardullo 2003).

определени емисионни линии в нейния спектър. Това съотношение всъщност отразява връзка между пълната маса на звездното население в галактиката и амплитудата на кривата ѝ на въртене. Наистина, ако един обект (звезда или газов облак в спиралния ръкав) с маса m от галактика с маса \mathcal{M}_g се движи по устойчива кръгова орбита с линейна (Кеплерова) скорост v , равновесието на гравитационната и центробежната сили означава, че:

$$mv^2/R = Gm\mathcal{M}_g/R^2 \Rightarrow v = (G\mathcal{M}_g/R)^{1/2}$$

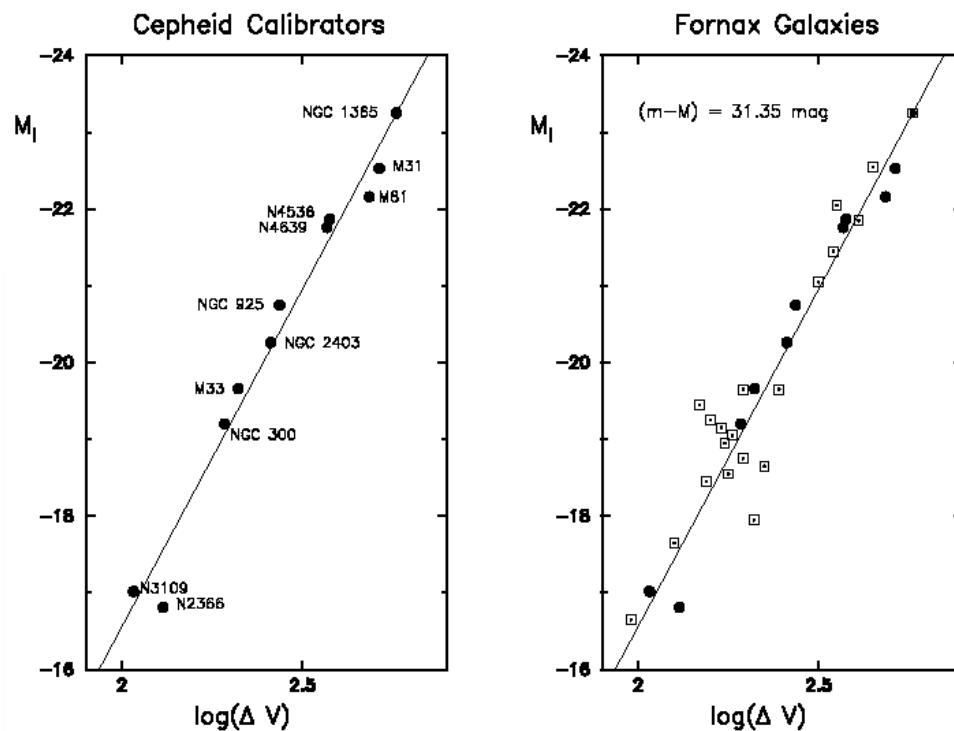
където G е Нютоновата гравитационна константа. Ако всички галактики от разглеждания тип имат едно и също съотношение “маса-светимост” $\mathcal{M}_g/L = \text{const}$, то $L \propto v^2 R$. Различни наблюдателни изследвания с богата статистика сочат наличието на връзка между светимостта и радиуса на галактиката от типа $L \propto R^a$, където a варира между 2 (постоянна повърхностна яркост) до 2.8. При $a = 2$ имаме $v \propto \mathcal{M}_g^{1/2}/R^{1/2} = L^{1/2}/R^{1/2} \propto R^{1/2}$ и оттук:

$$L \propto v^4 \tag{2.5}$$

Обикновено това се нарича *съотношение на Тули-Фишер* в литературата. Скоростта v често се пресмята от ширината на емисионната линия λ 21 см на неутралния водород. Чрез нея и с използване на абсолютната звездна величина на галактиката уравнението (2.5) може да се запише:

$$M = 4.8 - 2.5 \lg(L/L_\odot) \propto 10 \lg v \quad (2.6)$$

Както се вижда от Фиг. 2.4, това съотношение се изпълнява доста строго за широк клас от галактики. Най-точно обаче е то при спиралните галактики – в този случай може да се разглежда като първична стандартна свещ.



Фигура 2.4: Съотношение на Тули-Фишер ($M_I - \lg(v/\text{km.s}^{-1})$) за различни извадки от галактики. (Вляво:) за галактики с определени разстояния по цефеиди (калибрираща извадка). (Вдясно:) калибрираща извадка (плътни символи), наложена върху цялото население от спирални галактики от купа Fornax, наблюдавани в ивицата I и с налични спектроскопични данни.

Глава 3

Наблюдателни основи на съвременната космология

3.1 Парадокс на Олберс

Нютон е смятал, че Вселената е безкрайна и статична, с равномерно разпределение на звездите в нея. В подкрепа на това разбиране, той показва, че ако материјата не заема безкрайно пространство, тя би претърпяла колапс под действието на самогравитацията. Още съвременникът му Халей (Halley) обаче повдига възражението: “А защо тогава нощното небе е тъмно?” Възражението е формулирано по-късно в най-силната си форма от немския лекар и астроном Heinrich Olbers (1823) и се нарича в негова чест *парадокс на Олберс*. В една безкрайна и прозрачна Вселена, изпълнена със звезди, всеки лъч на зрение ще преминава през звезда, при това независимо дали звездите са разпределени равномерно или не. Нека пресметнем тогава колко ярко би било нощното небе. Да приемем, че всички звезди имат еднаква светимост L и че средната им пространствена концентрация е n . Тогава лъчистият поток $F(r)$ от една звезда, регистриран на разстояние r от нея е $L/(4\pi r^2)$, а специфичният интензитет (повърхностна яркост) от целия сферичен слой с дебелина dr :

$$dI(r) = \frac{L}{4\pi r^2} nr^2 dr = \frac{nL}{4\pi} dr$$

Тогава пълната повърхностна яркост от всички звезди във Вселената би бил:

$$I = \int_{r=0}^{\infty} dI(r) = \frac{nL}{4\pi} \int_0^{\infty} dr = \infty ,$$

т.е. нощното небе би било безкрайно ярко!

Възможните решения на този парадокс могат да се получат от разглеждане на опростяващите предположения:

- *Пространството във Вселената не е прозрачно:* Това бил отговорът на самия Олберс. Развитата по-късно термодинамика обаче показва, че той не е бил прав – всяко поглъщащо вещество по един безкрайно дълъг лъч на зрение, насилен със звезди, в крайна сметка би достигнало термодинамично равновесие с температура, равна на ефективната температура на звездите.
- *Произведенето на средната концентрация на звездите по тяхната светимост не е инвариант на космологичното разстояние:* Отделечените звезди биха могли да бъдат с по-малка светимост или с по-малка концентрация; например, ако ние се намираме в центъра на звезден куп с крайни размери. Достатъчно е $nL \propto 1/r$.
- *Вселената не е безкрайно голяма:* Например, ако тя се простира най-много на разстояние r_{\max} , повърхностната яркост на небето би била $\frac{nLr_{\max}}{4\pi}$. Впрочем такова решение бихме получили, ако Вселената е с безкрайни размери, но не съдържа звезди на космологични разстояния, по-големи от r_{\max} .
- *Лъчистият поток не е обратно пропорционален на квадрата от разстоянието:* Това е възможно, ако геометрията на вселенското пространство не е Евклидова. Освен това, законът $F(r) \propto 1/r^2$ предполага, че източникът е неподвижен спрямо наблюдателя. При систематично разширяване или свиване на Вселената, светлината от далечните източници ще търпи червено или синьо отместване. Така отместването на фотони от видимия спектър към инфрачервената област би довело до “потъмняване” на небето. Въщност влиянието на този ефект върху яркостта на небето е твърде малко.
- *Вселената не е безкрайно стара:* Това е по-тънко съображение, в сравнение с останалите. Изказано е още от писателя Е. А. По, а е облечено в строго научна форма от лорд Келвин (1824-1907). Поради крайната скорост на светлината и крайната възраст на Вселената t_0 , светлината от най-далечните източници може все още да не е стигнала до нас и повърхностната яркост на небето би била $I \sim \frac{nLct_0}{4\pi}$. Казано с по-поетичен език, Вселената е твърде млада, за да бъде изпълнена със светлина. Да обърнем внимание, че това би било вярно и за безкрайно стара Вселена, в която звезди са се появили едва преди някакво крайно време t_0 .

Моделът на безкрайната по размери, вечна (безкрайно стара) и Евклидова вселена не издържа наблюдателната проверка.

3.2 Космологичен принцип: изотропия и хомогенност

На малки скали, Вселената очевидно е силно анизотропна. В земни мащаби, привилегированото направление (“долу”) е към центъра на Земята; в мащабите на Слънчевата система, то е насочено към Слънцето; в рамките на Местната група от галактики, то се задава от оста Млечен път - M 31. Едва на мащаби по-големи от размерите на свръхкуповете от галактики ($\gtrsim 200$ Mpc), наблюданата Вселена се доближава до изотропията. Същото наблюдение може да се направи и по отношение на хомогенността – от земни мащаби до мащабите на Местната група, средната плътност на веществото се изменя от ~ 0.1 до 10^{-29} g/cm³, като втората стойност е все пак на порядък по-голяма от средната плътност на Вселената. Така че т. нар. *космологичен принцип* гласи, че Вселената е хомогенна и изотропна на големи мащаби: изглежда една и съща на всяко място и във всички направления.

3.3 Закон на Хъбъл

По-голямата част от видимата светимост на една галактика се дължи на излъчването на звездите в нея. Затова нейният типичен спектър съдържа абсорбционни линии, формирани в хладните горни звездни атмосфери, а в някои случаи и емисионни линии от горещия газ в активното галактично ядро (AGN). Спектроскопичните изследвания показват, че най-често измерената дължина на една такава линия е по-голяма от лабораторната, сиреч за огромното множество галактики $z > 0$ (вж. ур. 1.1) и се наблюдава *червено отместване*, а само за немного близки галактики то е синьо ($z < 0$). Такава статистика е налице едва от един век, приблизително от времето, когато галактиките са иденфицирани като обекти, разположени извън Млечния път. В периода 1912-1925 г. Слайфер (Slipher) определя отместването на близо 40 галактики, като синьо отместване показва само някои членове на Местната група.

Въз основа на малко по-голяма извадка от близо 50 обекта, през 1929 г. Едуин Хъбъл (Edwin Hubble) установява, че червеното отместване е пропорционално на разстоянието:

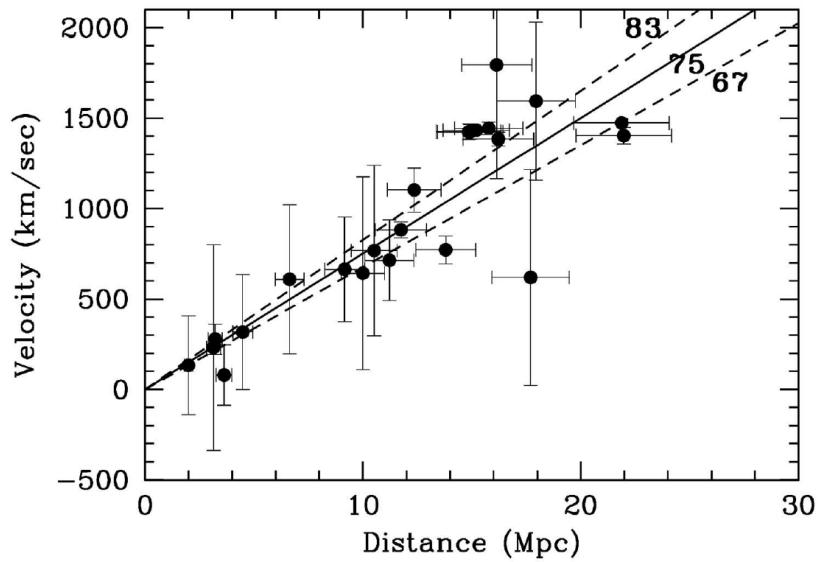
$$\boxed{z = \frac{H_0}{c} r}, \quad (3.1)$$

където H_0 е константа, понастоящем наречена *константа на Хъбъл*. Понеже членовете на извадката са били с малко $z < 0.04$, можем да използваме нерелативистичната формула за Доплеровото отместване $z = v/c$ и тогава *законът на Хъбъл* придобива формата:

$$v = H_0 r \quad (3.2)$$

Макар че z може да бъде определено с голяма точност, същото не може да се каже за разстоянието¹. По тази причина стойността на H_0 е претърпяла драстична промяна спрямо първоначалната оценка ($500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$). Съвременните оценки на тази величина се основават на извадки от галактики, разстоянието до които е определено с помощта на надеждни “стандарни свещи” (Фиг. 3.1). Като се обобщят резултатите от различни научни групи, може да се твърди, че Хъбловата константа е:

$$H_0 \equiv 100h = 70 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad h \simeq 0.7; \quad (3.3)$$

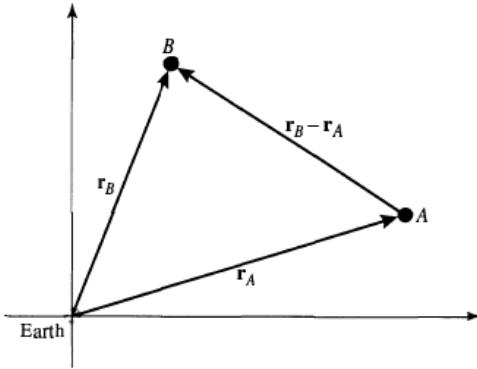


Фигура 3.1: Закон на Хъбъл по извадка от близки галактики, разстоянията до които са определени по класически цефеиди (по Freedman et al. 2001).

Законът на Хъбъл не е в противоречие с Космологичния принцип и се съгласува добре с парадокса на Олберс. Нека разгледаме две галактики А и В в отправна система, свързана със Земята, т.е. с Млечния път (Фиг. 3.2). Съгласно закона на Хъбъл (ур. 3.2), техните скорости на отдалечаване от нас ще бъдат $\vec{v}_A = H_0 \vec{r}_A$ и $\vec{v}_B = H_0 \vec{r}_B$, а скоростта на отдалечаване на галактиката В спрямо наблюдател в галактика А: $\vec{v}_B - \vec{v}_A = H_0(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$. Следователно, всички останали галактики се раздалечават една от друга по същия закон, установен от земен наблюдател.

Да вземем двойка галактики на разстояние r една от друга. Ако не им действват сили, то относителната им скорост $v = H_0 r$ една спрямо друга ще бъде постоянна и

¹ Всъщност, Хъбъл извежда своя закон по подизвадка от 20 галактики, разстоянието до които му е било известно.



Фигура 3.2: Схема на раздалечаващи се галактики: инвариантност на закона на Хъбъл.

времето, изтекло от момента на прям контакт:

$$t_H = \frac{r}{v} = \frac{1}{H_0} \quad (3.4)$$

Тази величина е очевидно еднаква за всяка двойка галактики и се нарича *Хъблово време*. Ако приемем съвременната оценка за стойността на Хъбловата константа (формула 3.3), то преди $H_0^{-1} = 14 \pm 1.4$ Gyr цялото вещества на Вселената е било събрано в малък обем. Така законът на Хъбъл естествено поражда т.нар. *Теория за Големия взрив*: моделът на Вселена, която се разширява от първоначално свръхплътно състояние.

Стойността на Хъбловото време е съвместима с оценките за възрастите на най-старите звезди във Вселената. Тя обаче може да служи само като грубо приближение на възрастта на Вселената. Ако гравитацията е единствената сила, действаща на големи мащаби, тя ще забавя разширението. В такъв случай Вселената се е разширявала по-бързо в миналото, отколкото днес, и възрастта ѝ τ_U е по-малка от H_0^{-1} . От друга страна, ако за плътността на енергията във Вселената основен принос има космологичната константа (вж. Глава ?), тогава пък ще преобладава силата на отблъсзване и $\tau_U > H_0^{-1}$.

Ако t_H представлява естествено характерно време във Вселената, то естествената характерна дължина е *Хъблово разстояние* $c/H_0 = 4300 \pm 400$ Мpc. Тя задава в първо приближение космологическият хоризонт: максималното разстояние, от което до нас може да достигне фотон. С определяне на точните стойности на възрастта и хоризонта на Вселената ще се занимаем в Глава ?.

Законът на Хъбъл дава обяснение и на парадокса на Олберс, с оглед на крайната възраст на Вселената $t_0 \sim t_H = H_0^{-1}$. Данните от обзори на небето показват, че плътността на галактичната светимост в локалната Вселена е $nL \approx 2 \times 10^8 L_\odot \text{ Mpc}^{-3}$ (колкото една 40-ватова крушка в сфера с радиус 1 AU). При радиус на хоризонта,

равен на Хъбловото разстояние c/H_0 , пълният светлинен поток, получаван от всички галактики в тази сфера, ще бъде:

$$F_{\text{gal}} \sim nL \frac{c}{H_0} \sim 2 \times 10^{-11} L_\odot \text{AU}^{-2},$$

докато потокът от Слънцето, падащ на земната повърхност, е $F_\odot = L_\odot/(4\pi \text{AU}^2) \approx 0.08 L_\odot \text{AU}^{-2}$ и $F_{\text{gal}}/F_\odot \sim 3 \times 10^{-10}$. С други думи, за да бъде Вселената огряна, колкото е Земята в ясен ден, тя трябва да е над милиард пъти по-стара и при това всички звезди в нея трябва да излъчват през цялото това време.

3.4 Видове частици

Развитието на съвременната космология е тясно обвързано с разработването на Стандартния модел на елементарните частици. В Таблица 3.1 са приведени общи сведения за най-важните от космологическа гледна точка частици. Огромна част от познатото ни в земни условия вещества се състои от бариони: протони и неutronи. Свободните неutronи са неустойчиви, с време на разпад едва 940 s (~ 15 min). В противовес на това, експерименталната долна граница на времето на разпад на протона е много по-голяма от Хъбловото време!

Таблица 3.1: Някои частици от Стандартния модел със значение в космологията.

Наименование	Статистика	Символ	Кварков състав	Енергия на покой [MeV]	Заряд
<i>Бариони</i>					
протон	фермион	p	uud	938.3	+1
неутрон	фермион	n	udd	939.6	0
<i>Лептони</i>					
електрон	фермион	e^-	–	0.511	-1
неутрино	фермион	ν_e, ν_μ, ν_τ	–	$< 2 \times 10^{-6} - 15.5$	0
<i>Калибровчни частици</i>					
фотон	бозон	γ	–	0	0
глюони	бозони	g	–	0	0
векторни бозони	бозони	W^\pm	–	80 385	± 1
		Z^0	–	91 188	0
Хигс бозон	бозон	H^0	–	1.253×10^5	0
<i>Кандидати за тъмно вещество</i>					
неутралино	фермион	\tilde{N}_1^0	–	$10^4 - 10^7$	0
хамелеон	бозон	–	–	$\propto \rho$	0

Поради твърде малката маса на електрона в сравнение с тази на барионите, видимото вещество във Вселената (в йонизирано, неутрално или молекулно състояние) обикновено се нарича *барионно вещество*. Около 75% от него е водород, а остатъкът почти изцяло е хелий, с много малък примес от тежки елементи. Това съотношение е близо до слънчевия химичен състав. Космическото неутрино се детектира трудно, поради нищожното сечение на (слабо) взаимодействие с други частици. Освен това, отделните типове (“аромати”) неутрино могат да се превръщат един в друг: т.нар. *осцилация на неутриното*. Скоростта на този процес е пропорционална на разликата от квадратите на масите на частиците; например, осцилацията на електронно неутрино, излъчвано от Слънцето, към някой от другите два типа е пропорционална на $\Delta(m_\nu^2 c^4) \approx 5 \times 10^5 \text{ eV}^2$, а на мюонно неутрино, възникващо при проникване на космически лъчи в горната атмосфера – на $\Delta(m_\nu^2 c^4) \approx 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$. За съжаление, такива измервания ни дават само разликата от квадратите на масите на типовете неутрино, но не и самите маси.

Голяма част от фотоните в космологични мащаби имат звезден или реликтов (т.е. от ранната Вселена) произход. И в двата случая е налице *локално термодинамично равновесие* между веществото и лъчението, като всеки елементарен микроскопичен процес се уравновесява от неговия обратен (“принцип на детайлното равновесие”). Това състояние се характеризира единствено от температурата T на излъчващата система, а плътността на енергията на равновесното (чернотелно) лъчение се описва от функцията:

$$u_\lambda d\lambda = \frac{4\pi}{c} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/k_B T \lambda) - 1} d\lambda , \quad (3.5)$$

където λ е дължината на вълната, h е константата на Планк, а k_B – константата на Болцман. Интегрирана по целия електромагнитен спектър, тази формула дава интегралната плътност на лъчистата енергия:

$$\epsilon_\gamma = aT^4 ; \quad a = \frac{8\pi}{15} \frac{k^4}{c^3 h^3} , \quad (3.6)$$

като $a = 4\sigma_{SB}/c$ се нарича *радиационна константа*, а σ_{SB} е константата на Стефан-Болцман. От израза за u_λ лесно може да се види, че концентрацията на фотоните в равновесното лъчение е $\propto T^3$, и чрез почленно делене с ур. 3.6 получаваме средна енергия на един фотон $\bar{E} \approx 3kT$, което е близо до максимума на спектъра ($E_{\max} \approx 5kT$).

Най-тайстената съставка на вселенското вещество е *тъмното вещество*. Понякога това понятие се използва по отношение на массивни обекти, чието излъчване е твърде слабо, за да бъде регистрирано: бели джуджета, неutronни звезди, останки от свръхнови, черни дупки, субзвездни обекти като кафяви джуджета и др. По-строгата

теоретична дефиниция е масивна съставка на Вселената, която не излъчва, нито взаимодейства с електромагнитното лъчение². Ако неутриното има маса, за което говорят съвременните резултати за неутринните осцилации, то може да се причисли към тъмното вещество. В някои разширения на Стандартния модел на элементарните частици се въвеждат масивни частици, които участват само в слабо и в гравитационно взаимодействие. Те не са регистрирани в лабораторни условия и се наричат най-общо WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles). Една от тях е неутралиното (вж. Таблица 3.1).

Ще се спрем по-подробно на проблема за тъмното вещество в Глава ?. В общия случай, ще се придържаме към по-широката дефиниция за вещество във Вселената, което не може да се регистрира дори с най-modерната технология.

3.5 ФОНОВО МИКРОВЪЛНОВО ЛЪЧЕНИЕ

Откриването на космическото микровълново лъчение (СМВ) има фундаментално значение за развитието на космологията. С помощта на микровълновата антена на Bell Labs, A. Penzias и R. Wilson (1965) установяват наличието на изотропен микровълнов фон на небето. Измерванията на СМВ, извършени от борда на сателита COBE (Cosmic Background Explorer) в края на XX век, показваха, че спектърът му доста точно се апроксимира с този на абсолютно черно тяло (ур. 3.5 и Фиг. 3.3) с температура и средна енергия на един фотон съответно:

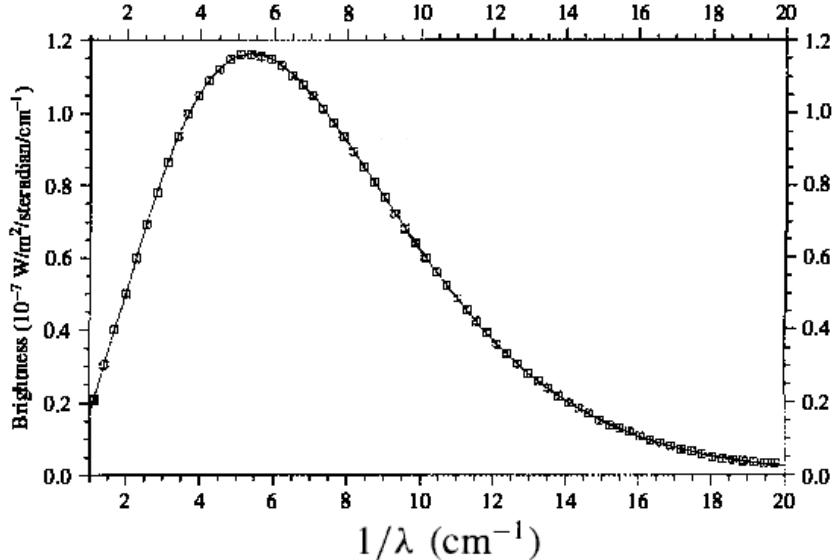
$$T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}, \quad \bar{E}_0 = 6.34 \times 10^{-4} \text{ eV} ; \quad (3.7)$$

Такава енергия е твърде ниска, за да ионизира водородния атом, и многократно по-ниска от необходимата за фотодисоциация на ядрото му. Тя съответства на средна дължина на вълната 2 mm и на фотонна концентрация $\sim 411 \text{ cm}^{-3}$.

В рамките на Теорията за Големия взрив, СМВ се обяснява по естествен начин. Ако в разширяващата се Вселена масата се запазва, то в миналото средната плътност е била по-голяма. Ако предположим, че ранната Вселена е била много гореща ($T \gg 10^4 \text{ K}$ или $kT \gg 1 \text{ eV}$), то барионното вещество би било напълно ионизирано и Вселената би била напълно непрозрачна поради разсейването върху големия брой свободни електрони³. Такова плътно, горещо и непрозрачно вещество би излъчвало като абсолютно черно тяло. При по-нататъшното си разширение, Вселената е изстивала и при температури $\sim 3000 \text{ K}$, ионите и електроните са рекомбинирали с образуването на неутрални атоми. Същественото намаляване на броя свободни елек-

² В строг смисъл, това може да се нарече “напълно прозрачно” или “невидимо” вещество.

³ Каквато е физическата картина и в дълбоките недра на звездите.



Фигура 3.3: Спектър на СМВ, получен от мисията COBE. С плътна линия е показан чернотелният спектър, който най-добре априксимира данните.

трони води до неефективно разсейване на реликтовите фотони, които започват да се разпространяват безпрепятствено във Вселената. Защо тогава измерената температура T_0 на СМВ е над 1000 пъти по-малка?

Да разгледаме област с обем V , която се разширява заедно с Вселената, т.е. $V \propto R(t)^3$, където $R(t)$ е настоящият мащабен фактор. Поради хомогенността на Вселената, не би трябвало да има обмен на топлина ($\delta Q = 0$, $T = \text{const}$) и, съгласно Първия принцип на термодинамиката $\delta Q = dE + PdV$, промяната на вътрешната енергия на фотонния газ с времето се дължи изцяло на разширението:

$$\frac{dE}{dt} = -P(t) \frac{dV}{dt},$$

където $E = \epsilon_\gamma V = aT^4 V$, а налягането на лъчението е $P = P_{\text{rad}} = \epsilon_\gamma/3$. Разписвайки израза вляво и след просто преобразуване стигаме до:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{3V} \frac{dV}{dt}$$

Сега като вземем предвид разширението на разглеждания обем, получаваме връзка между фотонната температура и скоростта на разширение на Вселената:

$$\frac{d(\ln T)}{dt} = \frac{d(\ln R)}{dt} \implies T \propto R(t)^{-1} \quad (3.8)$$

Това означава, че ако температурата на СМВ е паднала с фактор 1100 от момента на космологическата рекомбинация, то мащабният фактор е нараснал също толкова пъти. Наблюдаваното понастоящем от нас микровълново лъчение тогава е било с максимум в близкия инфрачервен диапазон, както при излъчването на хладните червени звезди.

По-нататък ние ще се опитаме да покажем как разгледаните фундаментални наблюдателни факти се съгласуват в Теорията на горещия Голям взрив.

Глава 4

Нютонова космология. Възможни модели на Вселената.

На космологични мащаби, на които Вселената се доближава до хомогенност и изотропия ($\gtrsim 100$ Мpc), еволюцията ѝ се определя най-вече от гравитацията. Слабото и силното взаимодействие са ефективни на много малки мащаби: съответно $\lesssim 10^{-18}$ m и $\lesssim 10^{-15}$ m. На по-големи мащаби ефективни са електромагнитното и гравитационното взаимодействие, като първото е мощно на атомно ниво; например силата на отблъскване между два протона е $\sim 10^{36}$ пъти по-голяма от гравитационното привличане между тях. Разглеждана като цяло обаче, Вселената е електрически неутрална и електростатичните сили на космологични мащаби могат да се пренебрегнат. Също така, междугалактичните магнитни полета са достатъчно слаби. Така най-слабото взаимодействие от гледна точка на физиката на частиците е решаващо за еволюцията на Вселената на големи мащаби.

Предсказанията на Нютоновата гравитационна теория са съществено различни¹ от тези на Общата теория на относителността (ОТО) само в граничния случай на дълбока потенциална яма или – според термините на ОТО – на голяма пространствена кривина. При малка потенциална яма (малка пространствена кривина), можем да прибегнем както до нютоново, така и до релативистично разглеждане, водени единствено от съображения за удобство. Първото нерядко е по-просто като математическа формулировка и по-познато като понятия.

4.1 “Прахов” модел на Вселената без налягане

Понятието “прах” (dust) в космологията се използва по традиция за обозначаване на вещества от нерелативистични частици с налягане $P = 0$. (Галактиките и свръхкупо-

¹ И по-неточни.

вете от галактики също се приемат като “прах”, доколкото взаимодействието между тях е пренебрежимо.) Нека разгледаме прост “прахов” модел на Вселената, в която веществото е разпределено равномерно с плътност $\rho(t)$, а началната точка е избрана произволно. За разлика от реалната Вселена, тук хомогенността и изотропията са в сила на всяка скала. Нека тънък сферичен слой с радиус $r(t)$ в момент t има маса m . Разширявайки се заедно с Вселената, със скорост $v(t) = dr(t)/dt$, слоят съдържа едни и същи прахови частици, а пъlnата му механична енергия е:

$$E = K(t) + U(t)$$

При разширяването на слоя гравитационното привличане от заградената от него сфера² обуславя намаляване на кинетичната K и увеличаване на потенциалната му енергия U . Съгласно закона за запазване на енергията:

$$\frac{1}{2}mv^2(t) - G\frac{M_r m}{r(t)} = \text{const} = -\frac{1}{2}mkc^2r_0^2 , \quad (4.1)$$

където $r_0 = r(t_0)$ е *моментният* радиус на слоя, а константата k е размерност (дължина)⁻² и нейният смисъл ще коментираме по-късно. Масата $M_r = (4\pi/3)r^3(t)\rho(t)$ на сферата, заградена от слоя, не се променя при разширението и след заместването ѝ в горното уравнение и съответните съкращения, получаваме:

$$v^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho r^2 = -kc^2r_0^2 ; \quad (4.2)$$

Сега се вижда, че знакът на константата k определя крайното състояние на такава Вселена:

- При $k > 0$ пъlnата енергия на слоя е отрицателна, т.e. имаме гравитационно свързана или *затворена* Вселена. В един момент разширението ѝ ще спре и ще се смени със свиване.
- При $k < 0$ пъlnата енергия на слоя е положителна, т.e. Вселената не е гравитационно свързана и е *отворена*. Разширението ѝ ще продължава вечно.
- При $k = 0$ пъlnата енергия на слоя е нула и говорим за *плоска* Вселена. Разширението ѝ ще продължи да се забавя, но ще спре едва при $t \rightarrow \infty$.

Забележка: Понятията “затворена”, “отворена” и “плоска” тук се употребяват единствено в смисъл на динамика на една Вселена с плоско пространство-време, а не са термини от ОТО.

² Масата извън слоя не допринася към изпитваното от него гравитационно привличане.

Космологическият принцип изиска разширението на всички слоеве да протича с еднаква скорост, независимо от техния радиус. Тогава радиусът на произволен слой, наречен *координатно разстояние*, ще бъде свързан с *мащабния фактор* $R(t)$, еднакъв за всички слоеве:

$$r(t) = R(t) r_0 , \quad (4.3)$$

където r_0 е *координата на слоя в съпътстваща (comoving) система* (Фиг. 4.1), а $R(t_0) = 1$ съответства на $r(t_0) = r_0$. Последното уравнение се отнася за всеки размер в съпътстващата координатна система, следователно се отнася и за дълчините на вълните. Тогава можем да запишем формулата на червеното отместване (ур. 1.1) за размерите на Вселената в моментите на излъчване (r_{em}) и на регистриране (r_{obs}) на даден фотон:

$$z = \frac{r_{\text{obs}} - r_{\text{em}}}{r_{\text{em}}}$$

и като положим моментът на наблюдение за t_0 и насочим оста на времето към миналото, то $r_{\text{obs}} \equiv r_0$, $r_{\text{em}} = r_0 R(t)$ и получаваме връзка между мащабния фактор и червеното отместване в чисто “прахова Вселена”:

$$R = \frac{1}{1+z} \quad (4.4)$$

Например, обекти с $z = 2$ са съществували във Вселена с мащабен фактор, три пъти по-малък от настоящия. Припомняйки си, че заградената от даден сферичен слой маса се запазва, т.e. $r^3(t)\rho(t) = \text{const}$, то $R^3(t)\rho(t) = \text{const} = \rho_0$ и еволюцията на плътността на “прахова Вселена” се описва от:

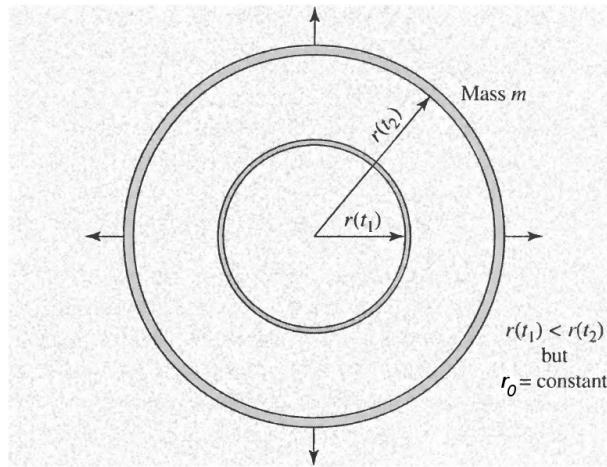
$$\rho(z) = \rho_0 (1+z)^3 , \quad (4.5)$$

където ρ_0 е настоящата ѝ плътност.

Еволюция на “прахова Вселена” без налягане

Макар че по традиция се нарича “константа на Хъбъл”, тази величина изобщо не е константа. Всъщност $H_0 = H(t_0)$ е стойността, измерена в настоящия момент космологично време, в съпътстваща координатна система. Величината $H(t)$ се нарича *параметър на Хъбъл*. Тогава законът на Хъбъл може да се запише така:

$$v(t) = H(t)r(t) = H(t)R(t)r_0$$



Фигура 4.1: Съпътстваща координатна система: координатата r_0 на слоя в нея е една и съща в моменти t_1 и t_2 , макар че $r(t_2) > r(t_1)$.

От друга страна, $v(t) = dr(t)/dt = r_0 dR(t)/dt$ и следователно:

$$H(t) = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}, \quad (4.6)$$

а оттук, чрез заместване в ур. 4.2, получаваме:

$$\left(H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho \right) R^2 = \left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho \right] R^2 = -kc^2; \quad (4.7)$$

Лявата страна на уравнението се отнася до всички сферични слоеве в разширяващата се Вселена и съдържа функции на t , докато отдясно имаме само константи. Използвайки закона за запазване на масата в сферата, заградена от всеки слой ($R^3\rho = \text{const}$), последната формула може да се преобразува в уравнение за мащабния фактор като функция на времето:

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8\pi G\rho_0}{3R} = -kc^2; \quad (4.8)$$

Сега се вижда лесно от ур. 4.7, че една плоска Вселена ($k = 0$), разширяваща се точно със своята втора космическа скорост, има плътност:

$$\rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}$$

(4.9)

Тъй като този случай е граничен по отношение на еволюцията, $\rho_c(t)$ е наречена

критична плътност. Ако приемем съвременната оценка за параметъра на Хъбъл $[h_0]_{\text{WMAP}} = 0.71$, получена въз основа на резултатите от *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP), то настоящата критична плътност на Вселената е $\rho_{c,0} \simeq 9.5 \times 10^{-30} \text{ g.cm}^{-3}$ или около 6 водородни атома на кубически метър. Оценката от WMAP на барионната плътност на Вселената сочи, че тя е едва около 4% от $\rho_{c,0}$. За приноса на тъмното вещество ще говорим подробно по-късно. Сега само ще отбележим, че “праховият модел” включва всички видове вещество.

Полезно е да дефинираме *параметър на плътността* $\Omega(t) \equiv \rho(t)/\rho_c(t)$ със съвременна стойност:

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \quad (4.10)$$

Да изразим сега чрез Ω основните характеристики на вселенската еволюция според “праховия модел”. С използването на ур. 4.5, стигаме до връзката:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{H_0^2}{H^2} = (1+z)^3 \frac{H_0^2}{H^2}$$

или

$$\Omega H^2 = (1+z)^3 \Omega_0 H_0^2 ; \quad (4.11)$$

Чрез включване на Ω в ур. 4.7, получаваме съответно:

$$H^2(1-\Omega)R^2 = -kc^2 ; \quad (4.12)$$

Последният израз възпроизвежда трите типа еволюция на Вселената в термини на параметъра на плътността:

- Ако $\Omega_0 > 1$, то $k > 0$ и Вселената е затворена.
- Ако $\Omega_0 < 1$, то $k < 0$ и Вселената е отворена.
- В граничния случай $\Omega = 1$ ($k = 0$) имаме плоска Вселена.

В ред случаи е удобно да се използва безразмерният *параметър на ускорението* на вселенското разширение:

$$q(t) = -R(t) \frac{d^2R/dt^2}{(dR/dt)^2} ; \quad (4.13)$$

Не е трудно да се покаже, че:

$$q(t) = \frac{1}{2}\Omega(t) , \quad q_0 = \frac{1}{2}\Omega_0 , \quad (4.14)$$

т.е. $q_0 = 0.5$ за плоска Вселена, а $q_0 > 0.5$ и $q < 0.5$ са случаите, съответно, на затворена и на отворена Вселена.

В Таблица 4.1 са приведени някои съвременни оценки на параметъра на плътността. С изключение на космологичния нуклеосинтез, те са пресметнати при изследване на гравитационни ефекти и затова включват както барионно, така и тъмно вещество. Забелязва се тенденция на нарастване на Ω_0 при големите системи, но изглежда съществува пределна стойност ~ 0.3 , което се съгласува с резултатите от WMAP: $[\Omega_{m,0}]_{\text{WMAP}} = 0.27 \pm 0.04$. Нека напомним обаче, че разглеждаме прост еднокомпонентен модел на Вселена от “прах без налягане”. По-нататък ще покажем, че в по-реалистични, многокомпонентни модели пресмятането на параметъра на плътността не е достатъчно, за да направим извод за крайната съдба на Вселената.

Таблица 4.1: Оценки на параметъра на плътността по различни наблюдателни методи.

Метод	Ω_0
Слънчева околност	$0.002 h^{-1}$
Ядра на елиптични галактики	0.007
Сателитни галактики	$0.018 h^{-1}$
Рентгеново хало на M87	$> 0.46 h^{-1}$
Групи галактики	0.16
Купове галактики	0.25
Гравитационни лещи	0.1 – 0.3
Космологичен нуклеосинтез	0.065 ± 0.045

Важно е обаче да обърнем внимание, че изводът за типа на Вселената по данни за настоящата епоха *не се отразява* на описание на най-ранната епоха на нейната еволюция. Ако запишем два пъти ур. 4.12 за настоящата и за произволна епоха и приравним левите страни, като включим и червеното отместване посредством ур. 4.11, не е трудно да изведем израза:

$$H^2 = H_0^2 (1+z)^2 (1 + \Omega_0 z) ,$$

от която получаваме за еволюцията на параметъра на плътността:

$$\Omega = \left(\frac{1+z}{1+\Omega_0 z} \right) \Omega_0 = 1 + \frac{\Omega_0 - 1}{1 + \Omega_0 z} \quad (4.15)$$

Полученият израз за H^2 показва, че в много ранна епоха, когато $R \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$, Хъбловият параметър също клони към безкрайност. Съгласно уравнение 4.15, знакът на $\Omega - 1$ не се променя и, в частност, ако $\Omega = 1$ в даден момент, то това важи и за всяка друга епоха. С други думи, Вселената не променя своя тип при

еволюцията си! Все пак при $z \rightarrow \infty$ параметърът на плътността клони към единица независимо от съвременната си стойност. Ранната Вселена е по същество плоска и разглеждането ѝ като такава опростява изключително описанието на първите минути от съществуването ѝ.

Машабен фактор

Еволюцията на машабния фактор в различните типове Вселена се дава от решението на ур. 4.8. Последното е най-просто за плоска Вселена с $k = 0$:

$$\int_0^R (R')^{1/2} dR' = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{c,0}}{3}} \int_0^t dt'$$

или

$$R_{\text{flat}} = (6\pi G \rho_{c,0})^{1/3} t^{2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{t}{t_H}\right)^{2/3} \quad (4.16)$$

Ако $\Omega_0 \neq 1$, решението на ур. 4.8 е по-сложно и може да се запише в параметрична форма:

- Затворена Вселена ($\Omega_0 > 1$)

$$\begin{aligned} R_{\text{closed}} &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} [1 - \cos(x)] \\ t_{\text{closed}} &= \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} [x - \sin(x)] \end{aligned} \quad (4.17)$$

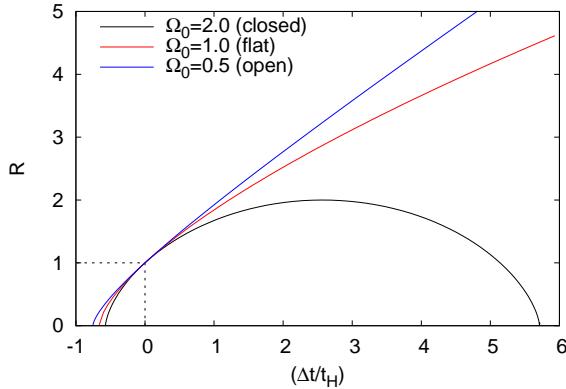
- Отворена Вселена ($\Omega_0 < 1$)

$$\begin{aligned} R_{\text{open}} &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} [\cosh(x) - 1] \\ t_{\text{open}} &= \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} [\sinh(x) - x] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Поведението на тези решения е показано на Фиг. 4.2. При $\Omega_0 > 1$ Вселената има крайно време на съществуване, а в противен случай ще се разширява вечно. Както се вижда, за ранна Вселена ($R < 1$) не съществува голяма разлика в поведението между трите типа.

Възраст и време назад

Сега вече можем да пресметнем възрастта на Вселената като функция на червеното отместване z . Трябва обаче да бъдем внимателни, когато наричаме даден момент



Фигура 4.2: Еволюция на мащабния фактор в три типа “прахова” Вселена. С пунктир е показано положението на днешната Вселена.

t от нейната еволюция “възраст”. В граничния случай $t \rightarrow 0$ познатите закони на физиката не могат да бъдат валидни. Използвайки t като мярка за времето, изтекло след Големия взрив, трябва да имаме предвид, че това екстраполация отвъд т.нар. *Планково време* ($t < 10^{-43}$ s), за което ще говорим в Глава ?.

Със заместване на връзката между мащабния фактор и червеното отместване (ур. 4.4) във формулите 4.16, 4.17 и 4.18, не е трудно да се изведат следните изрази за възрастта на:

- плоска Вселена ($\Omega_0 = 1$):

$$\frac{t_{\text{flat}}(z)}{t_H} = \frac{2}{3} \frac{1}{(1+z)^{3/2}} ; \quad (4.19)$$

- затворена Вселена ($\Omega_0 > 1$):

$$\frac{t_{\text{closed}}(z)}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{\Omega_0 z - \Omega_0 + 2}{\Omega_0(1+z)} \right) - \frac{2\sqrt{(\Omega_0 - 1)(\Omega_0 z + 1)}}{\Omega_0(1+z)} \right] ; \quad (4.20)$$

- отворена Вселена ($\Omega_0 < 1$):

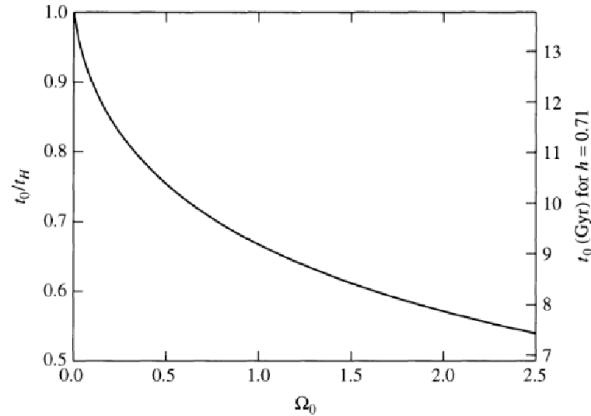
$$\frac{t_{\text{open}}}{t_H} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} \left[\cosh^{-1} \left(\frac{\Omega_0 z - \Omega_0 + 2}{\Omega_0(1+z)} \right) + \frac{2\sqrt{(1 - \Omega_0)(\Omega_0 z + 1)}}{\Omega_0(1+z)} \right] ; \quad (4.21)$$

В граничния случай на голямо z и с пренебрегване на членовете от по-висок

порядък, еволюцията на всички типове Вселена се описват от:

$$\frac{t_{\text{high-z}}(z)}{t_H} = \frac{2}{3} \frac{1}{(1+z)^{3/2} \Omega_0^{1/2}} ; \quad (4.22)$$

Щом ранната Вселена е била плоска с доста висока степен на точност, нейният тип може да се установи само чрез прецизни измервания. Най-новите изследвания подкрепят инфлационния сценарий за плоска Вселена. (Затова ще стане дума в края на този курс.) На Фиг. 4.3 е показана възрастта на Вселената като функция от Хъблово време при различни стойности на параметъра на плътността. Възрастта на една плоска Вселена е $2t_H/3$, което дава, ако приемем $[h_0]_{\text{WMAP}} = 0.71$, $t_0 \sim 9.2$ Gyr. Това е по-малко от общоприетата съвременна оценка 13.7 Gyr и от оценката за средната възраст на най-старите кълбовидни купове (11.5 Gyr), но е забележително, че простият “прахов” модел все пак дава добра оценка на t_0 в първо приближение. Разбира се, съставът на вселенското вещество е далеч по-сложен. Като се опитваме да го моделираме по-добре, ние ще достигнем до по-добро съответствие между възрастта на Вселената и тази на най-старите звезди в нея.



Фигура 4.3: Възраст на “прахова” Вселена като функция от параметъра на плътността. Нормировката по лявата ордината е направена спрямо Хъблово време $t_H \simeq 100h^{-1}$ години.

Космологическото време назад (lookback) $t_{lb} = t_0 - t(z)$, се определя като разликата между настоящата възраст на Вселената и възрастта ѝ, съответстваща на дадено червено отместване z . Например, за плоска Вселена от ур. 4.22 получаваме формулата за време назад в единици Хъблово време:

$$\frac{t_{lb}}{t_H} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right]$$

Примери: (за $z = 2$ и за $z = 6.28$.

4.2 “Прахов” модел на Вселената с налягане

Нека сега се опитаме да обобщим “праховия” модел, като стъпка към изграждането на модели с помощта на Теорията на относителността. В диференциалното уравнение (4.7), описващо еволюцията на мащабния фактор, ще включим и плътността на релативистични частици (фотони и неутрино). Разглеждаме Вселената като флуид, състоящ се от газ и релативистични частици, с равномерна плътност ρ , налягане P и температура T и избираме съществаща координатна система, свързана с разширяващ се сферичен слой с радиус r и с произволен център. Космологичният принцип гарантира динамичното равновесие между напускащите и влизашите в сферата фотони. Съгласно Първия принцип на термодинамиката в такава изотермна Вселена ($T = \text{const}$, $\delta Q = 0$) за флуида в разширяващата се сфера ще бъде изпълнено:

$$\frac{dU}{dt} = -P \frac{dV}{dt} = -\frac{4}{3}\pi P \frac{d(r^3)}{dt}$$

или:

$$\frac{d(r^3 u)}{dt} = -P \frac{d(r^3)}{dt},$$

където $u = U/V$ е вътрешната енергия на единица обем. Чрез последната величина можем да изразим плътността в термини на еквивалентна маса $\rho = u/c^2$ и прилагайки връзката $r(t) = R(t)r_0$, стигаме до уравнението на флуида:

$$\frac{d(R^3 \rho)}{dt} = -\frac{P}{c^2} \frac{d(R^3)}{dt}; \quad (4.23)$$

Веднага можем да се убедим, че при $P = 0$ получаваме условието за запазване на масата в “прахова” Вселена без налягане ($R^3 \rho = \text{const}$).

След умножаване на ур. 4.7 с R , вземане на производна по времето и елиминиране на коефициента $-kc^2$, не е трудно да се изведе *уравнението на ускорението* в “прахова” Вселена с налягане:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) R$$

(4.24)

Важно е да се отбележи, че ефектът на налягането (ако $P > 0$) се изразява в забавяне на ускорението. На пръв поглед това противоречи на физическата интуиция. Налягането обаче навсякъде е еднакво, извън и в дадена сфера, и не съществува негов градиент, който да упражнява сила върху нейната повърхност. Всъщност, еквивалентната маса на кинетичната енергия на частиците оказва допълнително гравитационно въздействие. Иначе предположението $P = 0$ е валидно за по-голямата

част от историята на Вселената; може да се покаже, че понастоящем $\rho \gg P/c^2$.

Уравненията (4.23) и (4.24) имат три неизвестни: R , ρ и P . За да ги решим, необходимо ни е и *уравнение на състоянието* $P = P(\rho)$. Общийят вид на последното е:

$$P = w\rho c^2 , \quad (4.25)$$

където w е константа, т.е. налягането е пропорционално на плътността на енергията на флуида. Например, за прах без налягане $w_m = 0$, докато за чернотелно излъчване $w_{rad} = 1/3$. Замествайки ур. 4.25 във флуидното уравнение (4.23), получаваме релацията:

$$R^{3(1+w)}\rho = \rho_0 = \text{const} ; \quad (4.26)$$

Така за прах без налягане имаме $R^3\rho_m = \rho_{0,m}$.

Глава 5

Релативистична космология. Динамика на Вселената

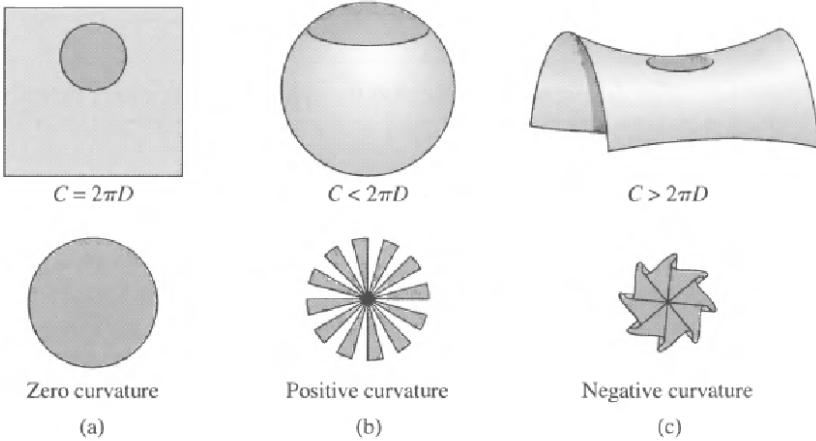
В основата на Теорията на относителността стои *Принципът на еквивалентността* между гравитационната и инерционната маса. Докато в Нютоновата гравитационна теория той е едно невероятно съвпадение, релативистичната концептуална рамка му дава естествено обяснение. В нея гравитационното ускорение на един обект не зависи от масата и физическия му състав – той просто следва геодезичната линия. С други думи, в ОТО кривината е геометрично свойство на самото пространство-време, локално определено от гравитацията.

5.1 Кривина на пространството и метрика

Нека за простота разгледаме първо двумерни пространства с кривина. Сфера с радиус R има постоянна кривина, която се дефинира като $K = 1/R^2$. Гаус въвежда локална кривина чрез радиуса на тангенциална сфера в разглежданата област от повърхността. Как можем да определим кривината на пространство, в което се намираме и което не можем да погледнем “отвън”? Нека си представим, че сме двумерни същества и се намираме на полюса на сфера, откъдето определяме разстояние D до даден обект, съответстващо на централен ъгъл θ . Тогава очакваният периметър на окръжността, преминаваща през обекта, е $C = 2\pi D$, докато реално измереният от нас ще бъде по-малък: $C_{\text{meas}} = 2\pi R \sin(\theta)$. Кривината на пространството представлява граничната стойност на отношението между $6\pi(C - C_{\text{meas}})/C$ и очакваната площ на окръжността:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{D \rightarrow 0} \frac{2\pi D - C_{\text{meas}}}{D^3} \quad (5.1)$$

За равнина очевидно $K = 0$, докато за елиптичен параболоид получаваме отрицателна кривина, защото $C_{\text{meas}} > 2\pi D$ (Фиг. 5.1).



Фигура 5.1: Пространства с различна кривина: нулева, положителна и отрицателна.

Разстоянието dl между две точки върху сферата, лежащи на две близки концентрични окръжности с център полюса и с разлика в измерените радиуси dD , ще бъде (срв. Фиг.):

$$(dl)^2 = (dD)^2 + (r d\phi)^2 = (R d\theta)^2 + (r d\phi)^2 ,$$

докато от връзката $r = R \sin \theta$ получаваме:

$$R d\theta = \frac{r}{\cos \theta} = \frac{R dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} ;$$

Като заместим от последното в предпоследното уравнение и разширим получения израз за тримерно пространство (т.е. от полярни към сферични координати), стигаме до:

$$(dl)^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2 ; \quad (5.2)$$

Тази формула показва ефекта от кривината на тримерното пространство, която – бидејки тримерни същества – не можем да си представим. При $K = 0$ изразът преминава в пространствената част на метриката за плоско пространство-време, наречена *метрика на Минковски*:

$$(ds)^2 \equiv ds^2 = (c dt)^2 - (dr)^2 - (r^2 d\theta)^2 - (r \sin \theta d\phi)^2 ; \quad (5.3)$$

Собственото разстояние се дефинира между две събития в пространство-времето, които са едновременни за даден наблюдател. В хомогенна и изотропна разширяваща

се Вселена, скоростта на светлината би трябвало да е една и съща на различни места и времевият член на метриката ще бъде просто $c dt$. (За разлика от метриката на Шварцшилд, при която наличието на массивен обект в центъра на отправната система води до по-сложна зависимост от времето.) Остава да изразим метриката чрез безразмерния мащабен фактор $R(t) = r(t)/r_0$ и да въведем кривина на разширяващата се Вселена, която е функция на времето:

$$K(t) = \frac{k}{R^2(t)} , \quad k = \text{const}(t)$$

Така можем да запишем в общ вид *метриката на Робертсън-Уокър*, описваща пространство-времевия интервал между две събития в хомогенна и изотропна Вселена:

$$ds^2 = (c dt)^2 - R^2(t) \left[\left(\frac{dr_0}{\sqrt{1 - kr_0^2}} \right)^2 + (r_0 d\theta)^2 + (r_0 \sin \theta d\phi)^2 \right]$$

(5.4)

Тук r_0 е координатата на обекта в съществуваща координатна система, а t е универсалното време, изтекло от Големия взрив досега. Последното не е абсолютно време, а отразява избора на синхронизация на часовниците на отдалечени наблюдатели. Например, наблюдатели в различни точки биха могли да синхронизират часовниците си чрез отбелязване на точната температура на СМВ или на точната стойност на Хъбловата константа.

5.2 Уравнение на Фридман

Всичко, което ни е необходимо да знаем за една хомогенна, изотропна и динамична (разширяваща се или свиваща се) Вселена, се задава от параметрите k и $R(t)$. Константата на кривината k дава знака на тази величина: положителна, отрицателна или нулева, както и нейната абсолютна стойност. При $k \neq 0$, то $\sqrt{1/|k|}$ е радиусът на кривината на Вселената, измерен в настоящия момент t_0 . А поведението на мащабния фактор $R(t)$ като функция на времето определя закон за нарастване (намаляване) на разстоянието в разширяващата се (свиваща се) Вселена.

Макар че неевклидови геометрии са разработвани още през XIX век, кривината на пространство-времето е обвързана със съдържащите се в него маса и енергия едва в ОТО, публикувана през 1915 г. Основното уравнение в тази теория е полевото уравнение на Айнщайн¹, което е релативистичен еквивалент на уравнението на Поасон в Нютонова динамика:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho ,$$

¹ Всъщност, уравнения на Айнщайн, защото в израза участват тензорни величини.

свързващо гравитационния потенциал Φ и плътността ρ в дадена точка. Градиентът на потенциала ни дава ускорението и оттук може да се пресметне траекторията на избран обект. Полевите уравнения на Айнщайн представляват математическа връзка между между метриката на пространство-времето и енергията и налягането в дадена точка, като траекториите на телата се определят от геодезичната в изкривеното пространство-време. Приложени в космологията, тези уравнения могат да се използват за извеждане на връзката между $R(t)$ и k , описващи кривината на Вселената, и плътността на енергията и налягането в нея $P(t)$. Това е направено през 1922 г. от Александър Фридман, който по начало предполагал динамична Вселена, в противовес на схващанията на самия Айнщайн. Някои от аспекти на неговия труд могат да бъдат разбрани и само в рамките на Нютоновата гравитация. В Глава 4, изхождайки от закона за запазване на енергията (ур. 4.1), вече изведохме уравнение за еволюцията на мащабния фактор (ур. 4.7) в “прахова” Вселена. С леко преобразование, от него получаваме уравнението на Фридман в Нютонова форма:

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{R(t)^2}; \quad (5.5)$$

Понеже производната на мащабния фактор участва в израза, повдигната на квадрат, то уравнението за еволюцията на свиваща се Вселена е просто обратно по времето на това за разширяваща се ($dR/dt > 0$). Бъдещето на разширяваща се Вселена се определя² от знака на k . При отрицателно k , дясната страна на ур. 5.5 е винаги положителна и, следователно, разширението ще продължава вечно. При $k > 0$, дясната страна най-напред е положителна (ранни и много плътни стадии от еволюцията на Вселената), но при достигане на максимален мащабен фактор $\sqrt{3kc^2/(8\pi G\rho)}$ разширението ще спре и ще се смени със свиване. Най-сетне, при граничния случай $k = 0$, $dR/dt \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow 0$. Въщност, тези три случая са аналогични на поведението на топка, хвърлена нагоре със скорост, в различно отношение спрямо втората космическа.

Нютоновата форма на уравнението на Фридман помага да си представим ефекта на самогравитацията върху изотропни разширяващи се обекти. Приложението му към реалната Вселена обаче е силно проблематично. Първо, един сферичен обект с краен радиус не може да се разглежда като хомогенен и изотропен: той има специална точка (център) и така хомогенността се нарушава, а също специална посока (към центъра) през всяка точка, което пък е изключение от изотропията. Тогава можем да си представим сфера с краен радиус, изрязана от безкрайна, хомогенна и изотропна Вселена. Но тогава гравитационното ускорение в една празна, сферично-

² Тук k трябва да се разглежда просто като параметър на динамиката на Вселената (както в Глава 4), а не като мярка за кривина на пространството.

симетрична обвивка ще бъде нулево. Този довод предполага също, че пространството е Евклидово. За да се изведе коректното уравнение на Фридман, отчитащо възможна ненулева кривина на пространството, трябва да се прибегне до полевите уравнения на Айнщайн. Видът на *уравнението на Фридман* изглежда доста подобен на нерелативистичния (ур. 5.5), приведена по-горе:

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{kc^2}{R(t)^2}; \quad (5.6)$$

Първата промяна спрямо нерелативистичния вид на уравнението е замяната на плътността ρ с плътността на енергията ϵ , разделена на c^2 . Енергията на частица с маса m в Теорията на относителността е:

$$E = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2},$$

където импулсът p се измерва от наблюдател, намиращ се на мястото на частицата и наблюдаващ изотропното разширение на Вселената около нея. За нерелативистични частици пекулярната скорост $v \ll c$, $p \approx mv$ и съответно:

$$E_{\text{non-rel}} \approx mc^2(1 + v^2/c^2) \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad \epsilon \approx \rho c^2,$$

докато за релативистични частици:

$$E_{\text{rel}} = pc;$$

Разбира се, и двата типа частици допринасят за плътността на енергията във Вселената и оттук за кривината на пространство-времето.

Припомняйки си дефинициите за Хъблов параметър (ур. 4.6) и критична плътност (ур. 4.9), можем да въведем *критична плътност на енергията*:

$$\epsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2; \quad (5.7)$$

Предефинирайки параметъра на плътността $\Omega(t) \equiv \epsilon(t)/\epsilon_c(t)$, можем да запишем уравнението на Фридман във вид, в който фигурират наблюдателни величини:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{R(t)^2 H(t)^2}; \quad (5.8)$$

Ако запишем това уравнение за настоящия космологичен момент и използваме оценки за Ω_0 и H_0 , ще получим оценка за радиуса на кривината на Вселената.

5.3 Уравнение на ускорението

За да стигнем до цялостно релативистично описание на еволюцията на Вселената, необходимо е да познаваме и мащабния фактор $R(t)$ като функция на времето. За целта трябва да прибегнем и до термодинамични съображения. Ако Вселената е съвършено хомогенна и изотропна, тогава нейното разширение не увеличава ентропията ѝ и може да се разглежда като адиабатен процес. За произволен обем от съществуващата координатна система обменът на топлина ще бъде нулев и тогава, съгласно Първия принцип на термодинамиката, промяната на вътрешната енергия за единица време ще бъде просто $\dot{E} = -P\dot{V}$. Нека за простота приемем, че V е обемът на сфера с радиус в съществуваща координатна система r_s . В такъв случай:

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}r_s^3 R(t)^3 \implies \dot{V} = \frac{4\pi}{3}r_s^3 (3R^2 \dot{R}) = V 3 \frac{\dot{R}}{R}, \quad (5.9)$$

а от връзката $E(t) = V(t)\epsilon(t)$ имаме:

$$\dot{E} = V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon = V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{R}}{R}\epsilon\right); \quad (5.10)$$

Комбинирайки последните две уравнения в израза за Първия принцип в адиабатно разширяваща се Вселена, стигаме до уравнението на флуида в релативистично разглеждане:

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\epsilon + P) = 0 \quad (5.11)$$

Уравнението на Фридман и уравнението на флуида представляват закони за запазване на енергията и от тях можем да изведем уравнение на ускорението, което описва забавянето или ускоряването на Вселената с времето. Умножаваме първото уравнение (5.6) с R^2 , пресмятаме производната и разделяме на $2\dot{R}R$:

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\dot{\epsilon}R^2 + 2\epsilon R\dot{R}) \rightarrow \frac{\ddot{R}}{R} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot{\epsilon}\frac{R}{\dot{R}} + 2\epsilon\right)$$

Можем да заменим от уравнението на флуида (5.11) $\dot{\epsilon}R/\dot{R} = -3(\epsilon + P)$ и получаваме стандартната форма на *уравнението на ускорението*:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) \quad (5.12)$$

Ако плътността на енергията ϵ е положителна, тя обуславя отрицателно ускорение, т.е. намалява \dot{R} и относителната скорост между два обекта във Вселената. От своя страна, налягането P е свързано с веществото, което изпълва Вселената. Газ, съставен от обикновено барионно вещество има положително налягане P , обусловено

от топлинното движение на частиците. Фотонният газ или газ, съставен от неутрино или WIMP, също оказва положително налягане. Условието за ускоряваща се Вселена е тя да съдържа компонента с налягане

$$P < -\epsilon/3 ;$$

Такова отрицателно налягане (ускорение) е позволено от законите на физиката – например, вътрешното налягане на разтегнато парче гума. В космологията, т.нар. *космологична константа* Λ осигурява такова отрицателно налягане $P = -\epsilon$. На този въпрос ще се спрем по-долу.

5.4 Уравнения на състоянието

И така, ние разполагаме с три уравнения, описващи динамиката на Вселената: уравнението на Фридман (5.6), на флуида (5.11) и на ускорението (5.12). Последното обаче е изведено от първите две, така че имаме система от две независими уравнения с три неизвестни величини: мащабен фактор $R(t)$, плътност на енергията $\epsilon(t)$ и налягане $P(t)$. За решението ѝ ни е необходимо допълнително *уравнение на състоянието* $P = P(\epsilon)$, свързващо налягането с плътността на енергията, заедно с налагането на подходящи гранични условия.

В общия случай, уравнението на състоянието е доста сложно – във физиката на твърдото тяло, например, налягането е сложна нелинейна функция на плътността. В космологията обаче разглеждаме силно разредени газове, с просто линейно уравнение на състоянието:

$$P = w\epsilon ,$$

където w е безразмерен параметър. При нерелативистичен идеален газ, плътността на енергията е почти изцяло определена от масата на частиците: $\epsilon \approx \rho c^2$. Тогава уравнението на състоянието (на Клапейрон-Менделеев) добива вида

$$P \approx \frac{kT}{\mu c^2} \epsilon$$

и като вземем предвид, че средноквадратичната скорост и температурата са свързани със съотношението $3kT = \mu \langle v^2 \rangle$, получаваме уравнение на състоянието на нерелативистичен газ:

$$P_{\text{nrel}} = w\epsilon_{\text{nrel}} , \quad w \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \ll 1 ; \quad (5.13)$$

В земни условия, повечето газове са нерелативистични. (Например, за въздух при стайна температура $w \sim 10^{-12}$.) В космоса газовете в настоящата епоха също обикно-

вено са нерелативистични – например, в области от ионизиран водород електроните са нерелативистични при $T \ll 6 \times 10^9$ K, а протоните – при $T \ll 10^{13}$ K.

Фотонният газ е гарантирано релативистичен, с уравнение на състоянието:

$$P_{\text{rel}} = \frac{\epsilon_{\text{rel}}}{3} \quad (5.14)$$

За газ от силно релативистични масивни частици ($\langle v^2 \rangle \sim c^2$) също имаме $w = 1/3$, а от умерено релативистични частици ($0 < \langle v^2 \rangle < c^2$) коефициентът варира: $0 < w < 1/3$.

Коефициентът w обаче не може да заема произволни стойности. При адиабатни пертурбации в газ с налягане P и плътност на енергията ϵ , скоростта на звука се задава от формулата:

$$c_s^2 = c^2 \left(\frac{dP}{d\epsilon} \right); \quad (5.15)$$

Тогава в среда с $w > 0$ скоростта на звука ще бъде $c\sqrt{w}$. Но звуковите вълни не могат да се движат по-бързо от светлината – в противен случай, би могло да се изпрати звуков сигнал в миналото и да се наруши причинно-следствената връзка. Следователно, $w \leq 1^3$. Някои стойности на w от особен интерес за космологията са:

- $w = 0$ (нерелативистично вещество)
- $w = 1/3$ (фотонен газ и/или газ от силно релативистични частици; понякога се нарича на научен жаргон просто “лъчение”.)
- $w < -1/3$: Този случай ще наричаме *тъмна енергия*⁴. Формата на тъмна енергия с $w = -1$ ($P = -\epsilon$) съответства на космологичната константа Λ .

5.5 Космологична константа

Космологичната константа Λ е въведена най-напред от Айнщайн при опита му да приложи своето полево уравнение към Вселената, съдържаща както вещества, така и лъчение. Тъй като по онова време никой не подозирал съществуването на СМВ, Айнщайн смятал, че голяма част от лъчението във Вселената се пада на светлината от звездите. От друга страна, плътността на енергията на това лъчение е доста по-малка от плътността на енергията на звездите. Оттук изводът на Айнщайн, че основният принос към плътността на енергията във Вселената се пада на нерелативистичното вещество, т.е. че Вселената е без налягане.

³ В среда с $w < 0$, скоростта на звука е имагинерна, т.е. малки пертурбации на плътността няма да породят устойчиви вълни, а такива, чиито амплитуди ще нарастват или ще намаляват с времето.

⁴ Понятието е предложено от Michael Turner.

Това разсъждение е правилно, ако не се вземе предвид, че Вселената се разширява, а към 1915 г. последното не било известно; нямали дали доказателства, че съществуват други галактики освен нашата. Така Айнщайн възприема представата за статична Вселена с положителна плътност на енергията, но с пренебрежимо налягане. Оказва се обаче, че една Вселена, съдържаща само вещества с плътност ρ , не може да бъде статична. В нея ускорението $\ddot{a} = -\nabla\Phi$ трябва да бъде нулево във всяка точка или гравитационният потенциал Φ да бъде постоянен. Но в такъв случай от уравнението на Поясон $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ следва, че $\rho = 0$; с други думи, единствената възможна статична Вселена е празната. Ако възникне такава, изпълнена с вещества, и тя първоначално е статична, гравитацията ще доведе до контракция. Ако възникне такава, която първоначално се разширява, тя или ще се разширява вечно, или ще достигне никакъв максимален размер и ще колапсира.

Айнщайн се опитва да реши проблема, като въвежда фактор Λ в своето полево уравнение, аналогично на уравнението на Поясон. (В нютоново разглеждане, това съответства на $\nabla^2\Phi + \Lambda = 4\pi G\rho$, т.e. имаме статично решение при $\Lambda = 4\pi G\rho$.) Тогава уравнението на Фридман добива вида:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5.16)$$

уравнението на флуида не се изменя, а уравнението на ускорението получава допълнителен член:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (5.17)$$

От модифицираното уравнение на Фридман (5.16) можем да видим, че въвеждането на Λ -члена съответства на допълнителна компонента на Вселената с плътност на енергията

$$\epsilon_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda,$$

а от неизменения вид на уравнението на флуида се вижда, че за да имаме $\epsilon_\Lambda = \text{const}$ ($\Lambda = \text{const}$), трябва да е налице и налягане:

$$P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda = -\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda \quad (5.18)$$

И така, космологичната константа се свързва с компонента на Вселената с постоянна плътност на енергията ϵ_Λ и с постоянно налягане $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$. Айнщайновата статична Вселена се описва от $\Lambda = 4\pi G\rho$ (от уравнението на ускорението), а от нулирането на лявата част на уравнението на Фридман се получава положителна кривина ($k = +1$)

с радиус на кривината:

$$R_0 = \frac{c}{2\sqrt{\pi G\rho}} = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \quad (5.19)$$

Самият Айнщайн е бил неудовлетворен от въвеждането на Λ -члена, наричайки го “твърде вреден за формалната красота на теорията”. Освен това, статичният модел с Λ -член се оказва неустойчив. Малка флуктуация в размера на Вселената може да доведе или до безкрайно разширение (плътността намалява, докато силата на отблъскване остава постоянна), или до колапс. Затова, когато Хъбъл доказва разширението на Вселената, Айнщайн с облекчение “изхвърля” космологичната константа, наричайки я “най-големия гаф в научната ми кариера”.

По ирония на историята, тъкмо работата на Хъбъл и последвалите я изследвания водят други учени до необходимостта от въвеждане на Λ -член. Първоначалната оценка на $H_0 = 500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ давала Хъблово време $\sim 2 \text{ Gyr}$, което е по-малко от възрастта на Земята. Едно възможно решение на проблема е въвеждането на космологична константа $\Lambda > 4\pi G\rho_0$, която да увеличи възрастта на Вселената при дадено H_0^{-1} . Понастоящем Λ -членът се смята за част от Стандартния космологичен модел, тъй като наблюденията на SNIa сочат положително ускорение на разширяващата се Вселена.

Отворен (и сложен) остава въпросът какво е физическото обяснение на космологичната константа. Един от водещите кандидати е *енергията на вакуума*. В квантовата физика вакуумът не е стерилна празнина – възможно е спонтанното раждане на двойки частици-античастици в него, чиято пълна енергия ΔE и време на живот Δt удовлетворяват съотношението на неопределеност на Хайзенберг:

$$\Delta E \Delta t \leq h ;$$

Енергийната плътност на виртуалните двойки частици-античастици е плътността на енергията на вакуума ϵ_{vac} . Нейната оценка е задача от квантовата теория на полето, която все още не е успешно решена. Предлага се естествената стойност $\epsilon_{\text{vac}} \sim E_P/\ell_P^3$, където Планковата енергия $E_P = 1.2 \times 10^{28} \text{ eV}$ е огромна по стандартите на физиката на елементарните частици, докато Планковата дължина $\ell_P = 1.6 \times 10^{-35} \text{ e}$ нищожна. Това дава стойност на енергийната плътност на вакуума:

$$\epsilon_{\text{vac}} \sim 3 \times 10^{133} \text{ eVm}^{-3} , \quad (5.20)$$

която е цели 124 порядъка по-голяма от съвременната критична плътност на Вселената! Така оценката на ϵ_Λ от наблюдения придобива фундаментално значение – наблюдавайки Вселената на огромни машаби, ние непряко изследваме вакуума на много малки машаби.

Глава 6

Стандартен космологичен модел

6.1 Вселени с единствена компонента

Нека запишем отново уравненията, определящи еволюцията на Вселената:

- Уравнение на Фридман (5.6):

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{kc^2}{R(t)^2} ;$$

- Уравнение на флуида (5.11):

$$\dot{\epsilon} + 3 \frac{\dot{R}}{R} (\epsilon + P) = 0 ;$$

- Уравнение на състоянието:

$$P = w\epsilon ;$$

При налагане на подходящи гранични условия, горната система може да бъде решена и да получим еволюцията на мащабния фактор, плътността на енергията и налягането. Действителната картина се усложнява чувствително от факта, че Вселената съдържа различни компоненти, с различно уравнение на състоянието: нерелативистично вещество ($w = 0$), лъчение ($w = 1/3$) и вероятно космологична константа ($w = -1$). (Напълно е възможно обаче да си представим Вселена, която съдържа и други екзотични компоненти.) За щастие, плътността на енергията е адитивна величина и ние можем да запишем уравнението на състоянието във вида $P = \sum_w w\epsilon_w$ и тогава за всяка компонента може да се запише отделно уравнение на флуида с решение, ако $w = \text{const}$:

$$\epsilon_w(R) = \epsilon_{w,0} R^{-3(1+w)} , \quad (6.1)$$

където $\epsilon_{w,0}$ е плътността на енергията на компонентата w в настоящия момент, при мащабен фактор $R_0 = 1$. За нерелативистичното вещество $\epsilon_m(R) = \epsilon_{m,0}/R^3$, докато за лъчението имаме $\epsilon_{\text{rad}} = \epsilon_{\text{rad},0}/R^4$, поради $\epsilon_{\text{rad}} = n(hc/\lambda) \propto R^{-3}R^{-1}$. Като надеждна оценка се приема, че плътността на лъчистата енергия от звездите е много по-малка от тази на СМВ ($\sim 3\%$), а е била и още по-малка в миналото, и може да се пренебрегне в първо приближение.

От друга страна, трябва да е имало ранен момент от вселенската еволюция, когато Вселената е била непрозрачна за неутриното. Затова трябва да се очаква космически фонов неутринен поток, чиято енергия е сравнима с тази на СМВ:

$$\epsilon_\nu = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \epsilon_{\text{CMB}} \approx 0.227 \epsilon_{\text{CMB}}, \quad (6.2)$$

или, общо за всички аромати неутрино,

$$\Omega_\nu = 0.681 \Omega_{\text{CMB}}; \quad (6.3)$$

Средната енергия на едно неутрино е сравнима с тази на един фотон: $\bar{E}_\nu \approx 5 \times 10^{-4}$ eV/ R , стига $\bar{E}_\nu > m_\nu c^2$. В космологични епохи, когато последното вече не е изпълнено, неутриното може да се разглежда като нерелативистично вещество. Ако всички типове неутрино понастоящем са съществено безмасови, с $m_\nu c^2 \ll 5 \times 10^{-4}$ eV, то днешната стойност на параметъра на плътността за лъчението е:

$$\Omega_{\text{rad},0} = \Omega_{\text{CMB},0} + \Omega_{\nu,0} = 8.4 \times 10^{-5}; \quad (6.4)$$

За жалост, плътността на пълната енергия на нерелативистичното вещество, както и тази на космологичната константа не са добре известни. По съвременни данни, Вселената е приблизително плоска, с $\Omega_{m,0} \sim 0.3$, и тогава $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\text{rad},0} \sim 0.7$. Тези стойности влизат в т. нар. “модел на котния знак” (Benchmark model). Във Вселена, съдържаща компоненти с различно w , уравнение 6.1 предсказва, че в граничния случай $R \rightarrow 0$, ще доминира компонента с най-голяма стойност на w , а при $R \rightarrow \infty$ (ако Вселената се разширява вечно) ще доминира компонентата с най-малко w . Понастоящем ние живеем в епоха на доминиране на веществото ($w = 0$), докато в далечното минало е била епохата на доминиране на лъчението ($w = 1/3$). А ако “моделът на котния знак” е верен, ние току-що сме навлезли в епоха с доминираща космологична константа ($w = -1$).

В една непрекъснато разширяваща се Вселена, мащабният фактор е монотонна функция на времето. Поради простата връзка $R = 1/(1+z)$, червеното отместване z на даден обект може да се използва вместо времето t , когато регистрираната от нас светлина е била излъчена от него. Допълнително съображение в полза на този

подход е, че решението $R = R(t)$ и оттук връзката $t = t(R) = t(z)$ не се получава лесно в многокомпонентна Вселена – за последните уравнението на Фридман може да се запише:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_w \epsilon_{w,0} R^{-1-3w} - kc^2 ; \quad (6.5)$$

Всеки член от дясната страна на уравнението зависи от машабния фактор по различен начин: приносът на лъчението е пропорционален на R^{-2} , на веществото – на R^{-1} , на кривината не зависи от R , а на космологичната константа зависи от R^2 . Затова решението за даден модел, например този на “котния знак”, не води до проста аналитична форма на $R(t)$. Затова опростените, нереалистични случаи на вселени с една компонента са полезни, за да ни създадат представа за физиката на разширяващата се Вселена. По-долу ще обобщим основни свойства на такива модели.

Празна Вселена с кривина

В този случай не съществува компонента с принос към плътността на енергията, а уравнението на Фридман се свежда до $\dot{R}^2 = -kc^2$. Очевидните решения са:

- *Статична и плоска Вселена* ($\dot{R} = 0$ и $k = 0$): Тя се описва от метриката на Минковски (ур. 5.3) и в нея са валидни всички трансформации от Специалната теория на относителността.
- *Празна Вселена с отрицателна кривина* (Вселена на Милн, $k = -1$): $\dot{R} = \pm c/r_0$ или линейна зависимост на машабния фактор от времето. Възрастта на такава Вселена е точно равна на Хъбловото време. Разбира се, тя е просто математическа конструкция – ако Вселената не съдържа нищо, няма да съществуват и наблюдатели, които да я опишат. Но ако плътността на Вселената е много малка в сравнение с критичната ($\Omega \ll 1$), то линейно нарастващият машабен фактор е добра апроксимация на реалността.

Лесно може да се покаже, че действителното разстояние в настоящия космологически момент t_0 до обект с червено отместване z в такава Вселена е:

$$D_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \ln(1+z) ,$$

а в момента на излъчването:

$$D_p(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{\ln(1+z)}{1+z} ;$$

Както се вижда, в празна Вселена с отрицателна кривина можем да наблюдаваме обекти, които са произволно далеч *в момента на наблюдението*. Величината

$D_p(t_e)$ има максимум при $z = e - 1$ и следователно можем да наблюдаваме обекти, които в момента на излъчването са били на разстояние, не по-голямо от $(1/e)(c/H_0)$.

Пространствено плоски вселени

Отпадането на втория член отдясно от ур. 6.5, при наличието на единствена компонента с никаква стойност на w , опростява уравнението до:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_{w,0} R^{-1-3w} \quad (6.6)$$

Като направим разумното предположение, че машабният фактор зависи от времето по степенен закон $R \propto t^q$, стигаме до решение $q = 2/(3+3w)$, с ограничението $q \neq -1$. Машабният фактор и Хъбловото време в такава Вселена съответно са:

$$R(t) = (t/t_0)^{2/(3+3w)}, \quad H_0 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+w)} t_0^{-1}, \quad (6.7)$$

където възрастта на Вселената е:

$$t_0 = \frac{1}{1+w} \left(\frac{c^2}{6\pi G \epsilon_0}\right)^{1/2} = \frac{2}{3(1+w)} H_0^{-1}; \quad (6.8)$$

Моментът от времето t_e , когато е била излъчена светлината от далечна галактика, ще бъде свързан с възрастта на Вселената и с червеното отместване посредством:

$$t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{3(1+w)/2}} = \frac{2}{3(1+w)H_0} \frac{1}{(1+z)^{3(1+w)/2}}, \quad (6.9)$$

а за настоящото действително разстояние до нея получаваме:

$$D_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3w} [1 - (1+z)^{-(1+3w)/2}], \quad (6.10)$$

където $w \neq -1/3$. Разстоянието до най-далечния видим обект се нарича *разстояние до хоризонта*. Във Вселена, описана от метриката на Робъртсън-Уокър, то е:

$$D_{\text{hor}}(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{R(t)}; \quad (6.11)$$

Величината има крайна стойност в плоска Вселена с $w > -1/3$:

$$D_{\text{hor}}(t_0) = ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3w}; \quad (6.12)$$

Очевидно, че ако такава Вселена е запълнена само с вещество ($w = 0$) или само с лъчение ($w = 1/3$), наблюдалелят ще види ограничена част от нея. Тази *видима Вселена* се състои от всички точки, които са причинно свързани с наблюдателя – нищо извън нея не може да му окаже влияние. В плоска Вселена с $w < -1/3$, разстоянието до хоризонта е безкрайно и всички точки са причинно свързани с наблюдателя. Ако няма поглъщане, в нея могат да се наблюдават обекти с безкрайно голямо червено отместване.

От уравненията, които изведохме по-горе, лесно можем да получим основните характеристики на пространствено плоски Вселени с различни единствени компоненти. Те са приведени в Таблица 6.1.

Таблица 6.1: Пространствено плоски вселени с една компонента.

Компонента	Възраст t_0	Машабен фактор	$D_{\text{hor}}(t_0)$	$D_p(t_0)$
Вещество*, $w = 0$	$\frac{2}{3H_0}$	$R_m(t) = (t/t_0)^{2/3}$	$\frac{2c}{H_0}$	$\frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$
Лъчение, $w = 1/3$	$\frac{1}{2H_0}$	$R_{\text{rad}}(t) = (t/t_0)^{1/2}$	$\frac{c}{H_0}$	$\frac{c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{1+z}\right)$
Косм. константа†	∞	$R_\Lambda(t) = \exp(H_0(t - t_0))$	∞	$\frac{cz}{H_0}$

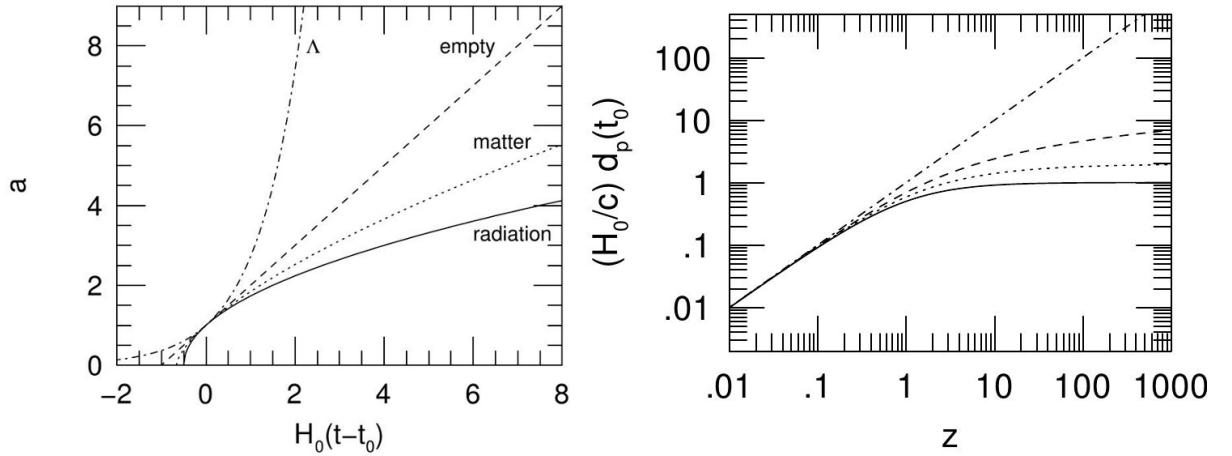
* Вселена на Einstein - de Sitter

† Вселена на de Sitter

Еволюцията на машабния фактор, както и зависимостта на действителното разстояние от червеното отместване в празна Вселена и в плоски вселени с една компонента е онагледена на Фиг. 6.1. Случаят на плоска Вселена, която съдържа само лъчение, е особено интересен, тъй като в реалната ранна Вселена членът в уравнението на Фридман (6.5), отговарящ за приноса на лъчението, е бил доминиращ. Това приближение обаче се нарушава за период от порядъка на Планковото време, когато ОТО – като класическа теория – не е вече валидна и трябва да се отчитат квантови ефекти. В експоненциално разширяваща се Вселена с единствена компонента космологична константа, осигурявана от енергията на вакуума, енергийната плътност остава постоянна поради непрекъснатите раждане и анихиляция на виртуални двойки частица-античастица. Единствено в такава Вселена действителното разстояние до обекта е право пропорционално на червеното му отместване, докато за всички други модели това е изпълнено само в граничния случай $z \ll 1$. Щом един

обект достигне разстояние, по-голямо от Хъбловото, скоростта му на отдалечаване става свръхсветлинна и той е вече невидим за наблюдателя.

В простите модели на празни или пък плоски вселени с единствена компонента разширението продължава вечно, ако е налице и в настоящия момент $t = t_0$. Възможно ли е да съществува Вселена, в която разширението се сменя с колапс или пък в която мащабният фактор не е степенна функция на времето? Такива модели изискват и двата члена от дясното в уравнението на Фридман (6.5) да бъдат ненулеви и непренебрежими.



Фигура 6.1: Еволюция на вселени с една компонента. (*Вляво:*) Мащабен фактор като функция от времето в разширяваща се празна Вселена (пресечена линия), плоска Вселена с единствена компонента вещества (пунктир), плоска Вселена с единствена компонента лъчение (плътна линия) и плоска Вселена с единствена компонента космологична константа (пресечено-пунктирна линия). (*Вдясно:*) Зависимост на действителното разстояние от червеното отместване. Означенията са същите.

6.2 Вселени с много компоненти

Видът на уравнението на Фридман, в което фигурират наблюдателните величини Ω_0 и H_0 (5.8), можем да запишем така:

$$K(t_0) = \frac{k}{R(t_0)^2} = \frac{\kappa}{r_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1) ,$$

където $\kappa = kr_{\text{cur},0}^2/R(t)^2$, а $r_{\text{cur},0}$ е радиусът на кривината на Вселената. Оттук можем да изключим експлицитното кривината от уравнението на Фридман (5.6):

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{H_0^2}{R(t)^2}(\Omega_0 - 1)$$

или

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{c,0}} + \frac{1 - \Omega_0}{R(t)^2}, \quad (6.13)$$

където настоящата критична плътност е $\epsilon_{c,0} = 3c^2 H_0^2 / (8\pi G)$.

Към днешна дата можем с увереност да кажем, че Вселената се състои от вещество с плътност на енергията $\epsilon_m \propto R^{-3}$, лъчение с $\epsilon_{rad} \propto R^{-4}$ и космологична константа с $\epsilon_\Lambda = \text{const}(R)$. (Активни са изследванията на т. нар. “квинтесенция”, компонента с $-1 < w < -1/3$, но поради липса на достатъчно убедителни наблюдателни доказателства няма да я включваме в нашето разглеждане.) Тогава ур. 6.13 ще добие вида:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{rad,0}}{R^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{R^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{R^2}, \quad (6.14)$$

въвеждайки означенията $\Omega_{rad,0} \equiv \epsilon_{rad,0}/\epsilon_{c,0}$, $\Omega_{m,0} \equiv \epsilon_{m,0}/\epsilon_{c,0}$, $\Omega_{\Lambda,0} \equiv \epsilon_{\Lambda,0}/\epsilon_{c,0}$ и $\Omega_0 \equiv \Omega_{rad,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$. Последният член в уравнението дава приноса на кривината на Вселената. “Моделът на котния знак”, който се съгласува с наличните данни, е пространствено-плосък, т.е. има $\Omega_0 = 1$, но нека имаме предвид, че наличието на някаква слаба кривина все още не може да се изключи.

Записвайки последното уравнение за мащабния фактор посредством $H = \dot{R}/R$ и интегрирайки го, ще получим:

$$H_0 t = \int_0^R \frac{dR'}{\left[\Omega_{rad,0}/R'^2 + \Omega_{m,0}/R' + \Omega_{\Lambda,0} R'^2 + (1 - \Omega_0) \right]^{1/2}} \quad (6.15)$$

В общия си вид, интегралът отляво няма аналитично решение, но може да се пресметне числено при зададени стойности на параметрите на плътността на веществото, лъчението и космологичната константа. Прости аналитични приближения се получават в някои частни случаи. Например, във вселена с лъчение, вещество, кривина и космологична константа, лъчението преобладава в най-ранните етапи на разширенето и последното уравнение се опростява до:

$$H_0 t \approx \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{\Omega_{rad,0}}} \approx \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{rad,0}}} R^2 \Rightarrow R(t) \approx (2\sqrt{\Omega_{rad,0}} H_0 t)^{1/2}$$

В граничния случай $\Omega_{rad,0} = 1$, решението се свежда до плоска Вселена, съдържаща единствено лъчение. Ако Вселената продължи да се разширява вечно, тогава в граничния случай $R \rightarrow \infty$, ще преобладава космологичната константа. При определени стойности на $\Omega_{rad,0}$, $\Omega_{m,0}$ и $\Omega_{\Lambda,0}$, ще има междинни епохи, когато ще преобладава веществото или кривината. Например, в “модела на котния знак” равнодяловост меж-

ду вещества и лъчение се достига при мащабен фактор $R_{\text{rad},m} \approx 2.8 \times 10^{-4}$, а между вещества и космологична константа – при $R_{m,\Lambda} \approx 0.75$, като една вселена, съдържаща единствено вещества е добро приближение на реалността при $R_{\text{rad},m} \ll R \ll R_{m,\Lambda}$. Но в някои етапи на разширението на Вселената, две от компонентите са със сравнима плътност на енергията и тогава трябва да се използва двукомпонентен модел. Такива са случаите $R(t) \sim R_{\text{rad},m}$ или $R \sim R_{m,\Lambda}$.

Вселена с вещества и кривина

Това е исторически първият двукомпонентен модел, развит след отхвърлянето на Λ -члена и при липса на яснота относно стойността на параметъра на плътността. Интересът е бил насочен към модели на вселени с кривина, в които преобладава веществото. Както ще се убедим, такива модели изграждат усет за взаимодействието между кривина, разширение и плътност.

Както вече показахме, плоска вселена с вещества без налягане ($w = 0$) ще се разширява по закон $R(t) \propto (t/t_0)^{2/3}$ (вж. Таблица 6.1). Такава крайна съдба на Вселената понякога се нарича “Големият мраз” (Big Chill), понеже температурата намалява monotонно с разширението. Крайната съдба на вселена с кривина, която съдържа само вещества, зависи от стойността на параметъра на плътността Ω_0 – за нея уравнението на Фридман се свежда до:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{R^3} + \frac{1 - \Omega_0}{R^2}; \quad (6.16)$$

Тогава кривината, плътността и крайната съдба на вселената са взаимообвързани и възможните случаи на вселенска еволюция са:

- При $\Omega_0 > 1$, ще се стигне до момент, когато $H(t) = 0$, а мащабният фактор ще бъде $R_{\max} = \Omega_0/(\Omega_0 - 1)$. Последващият стадий на свиване ще бъде симетричен във времето спрямо стадия на разширение¹. В контракционната фаза на такава вселена ще се наблюдава синъо отместване, както и постепенно отместване на максимума на СМВ от микровълновия към инфрачервения диапазон и т.н. В крайна сметка, такава вселена ще колапсира за крайно време до $R = 0$; събитие, което понякога се нарича “Голямото смякване” (Big Crunch). С други думи, вселена от вещества с $\Omega_0 > 1$ е не само краяна по размери, но и с ограничена възраст.
- При $\Omega_0 < 1$ и кривина $\kappa = -1$ и двета члена от дясната страна на ур. 6.16 са по-

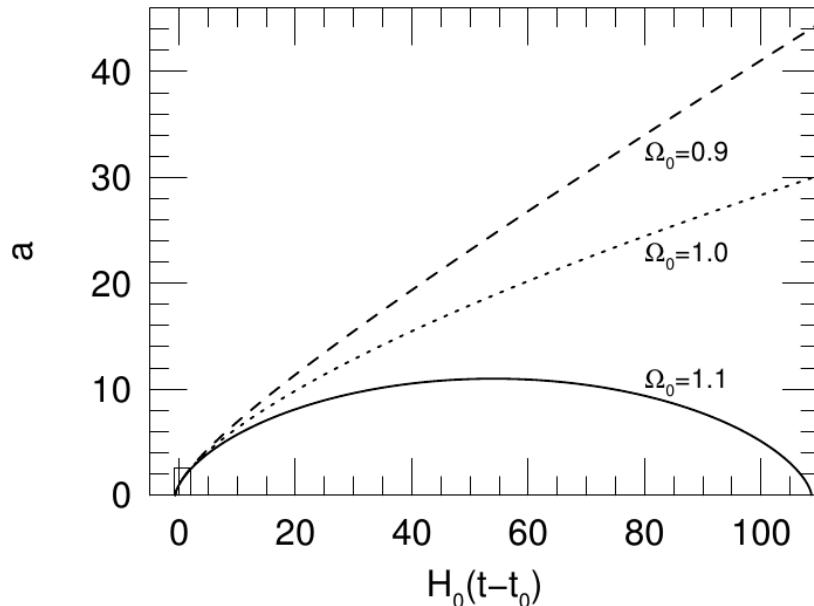
¹ Това е абсолютно вярно обаче само в съвършено хомогенна вселена, разширяваща се строго адиабатно, т.е. при запазване на ентропията. В реалната Вселена ентропията не се запазва на малки мащаби – например, звездите генерираят ентропия чрез излъчването си и тези процеси са *не обратими*.

ложителни. Следователно, ако такава вселена се разширява в момент $t = t_0$, тя ще продължи да се разширява вечно. В ранна епоха с малък мащабен фактор, ще доминира първият член и мащабният фактор ще расте по закона $R(t) \propto t^{2/3}$. В крайна сметка обаче веществото ще се разреди далеч под критичната плътност и вселената ще продължи да се разширява като вселена с отрицателна кривина, по закона $R(t) \propto t$.

- Плоска вселена с $\Omega_0 = 1$ също ще се разширява към “Голям мраз” по закона $R(t) \propto t^{2/3}$.

Еволюцията на мащабния фактор, получена от решението на интеграла (6.15), е показана на Фиг. 6.2. При $\Omega_0 \neq 1$ решението е в параметричен вид. Времето за живот на вселена с $\Omega_0 > 1$ се пресмята просто по формулата:

$$t_{\text{crunch}} = \frac{\pi}{H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \quad (6.17)$$



Фигура 6.2: Еволюция на вселена с кривина, съдържаща само вещество.

Разглеждането ни показва, че плътността е решаващият параметър за еволюцията на вселени, съдържащи само вещество. Наличието на космологична константа, различна от нула, променя обаче съществено тази картина.

Вселена с вещество и космологична константа

Нека разгледаме пространствено плоска вселена с вещество и космологична константа. Този случай е особено интересен, понеже представлява добра апроксимация на днешната Вселена. Тогава $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ и уравнението на Фридман добива вида:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{R^3} + (1 - \Omega_{m,0}) ; \quad (6.18)$$

Първият член отлясно отчита приноса на веществото и е винаги положителен, докато знакът на втория зависи от това дали плътността на веществото е над критичната. Плоска вселена с $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ (т.е. с $\Omega_{m,0} < 1$) ще продължава да се разширява вече към “Голям мраз”. Отрицателна космологична константа би осигурила *сили на привличане* и тогава вселената ще спре да се разширява при достигане на мащабен фактор

$$R_{\max} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \right)^{1/3}, \quad (6.19)$$

и ще колапсира обратно за общо време:

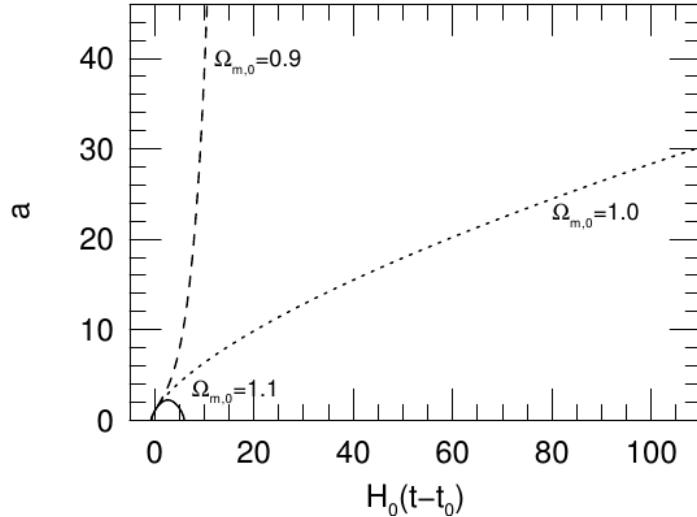
$$t_{\text{crunch}} = \frac{2\pi}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} ; \quad (6.20)$$

Фигура 6.3 илюстрира голямата чувствителност на еволюцията на разглежданата двукомпонентна вселена от стойността на $\Omega_{m,0}$. Ако космологичната константа е отрицателна, времето на живот на пространствено плоска вселена е изключително малко. Например, една вселена с положителна кривина и съдържаща само вещество при $\Omega_{m,0} = 1.1$ би достигнала възраст $t_{\text{crunch}} \approx 110H_0^{-1}$ (срв. Фиг. 6.2), докато в плоска вселена с $\Omega_{m,0} = 1.1$ и $\Omega_{\Lambda,0} = 1.1$, “Голямото смачкване” би настъпило за време едва $t_{\text{crunch}} \approx 7H_0^{-1}$. Макар че отрицателни стойности на космологичната константа не са забранени от законите на физиката, изглежда, че живеем във Вселена с неотрицателни такива. Интегрирането на уравнението на Фридман в такъв случай води до решение за еволюцията на мащабния фактор:

$$R(t) \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3}, \quad R \ll R_{m,\Lambda} \quad (6.21)$$

$$R(t) \approx R_{m,\Lambda} \exp(\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} H_0 t), \quad R \gg R_{m,\Lambda} \quad (6.22)$$

Вторият израз дава експоненциален закон за разширение за късна епоха на плоска вселена, с преобладаваща космологична константа. В такава вселена интегралното



Фигура 6.3: Еволюция на плоска вселена с вещества и космологична константа.

уравнение на Фридман (6.15) има аналитично решение за $H_0 t$, от което се извежда формула за настоящата ѝ възраст:

$$t_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left(\frac{\sqrt{1-\Omega_{m,0}} + 1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right) \quad (6.23)$$

Ако пренебрегнем приноса на лъчението и апроксимираме нашата Вселена с параметри $\Omega_{m,0} \simeq 0.3$ и $\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0.7$, като се придържаме към оценката за Хъбловата константа $H_0 = 70 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (уп. 3.3), тогава нейната възраст излиза:

$$t_0 = 0.964 H_0^{-1} = 13.5 \pm 1.3 \text{ Gyr} ,$$

а моментът на равнодяловост между веществото и космологичната константа е:

$$t_{m,\Lambda} = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln (1 + \sqrt{2}) = 0.702 H_0^{-1} = 9.8 \pm 1.0 \text{ Gyr} ;$$

Както ще видим по-долу, пренебрегването на приноса на лъчението няма голямо отражение върху модела. Така че ако “моделът на котния знак” с параметри $\Omega_{m,0} = 0.3$ и $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$ е добро приближение за днешната Вселена, тогава от 4 милиарда години настече тя е с преобладаваща космологична константа.

Вселена с вещество, космологична константа и кривина

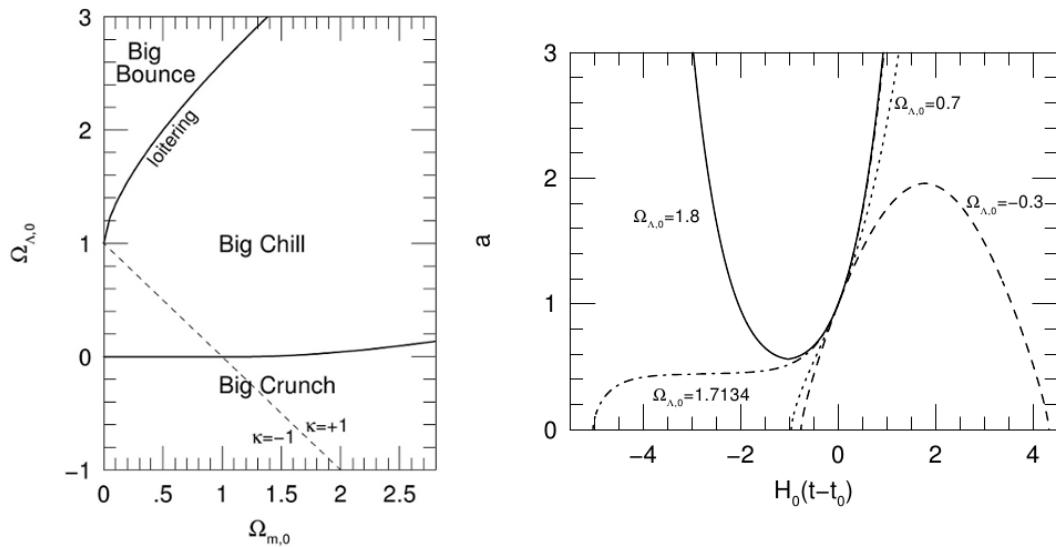
Ако една вселена, съдържаща вещество и космологична константа, има и кривина ($\kappa \neq 0$), тогава съществуват редица различни възможности за еволюцията на мащабния фактор във времето. Например в статичния модел на Айнщайн, който разглеждахме в предишната част, $\kappa = +1$ и $\epsilon_\Lambda = \epsilon_m/2$. Такава вселена е крайна като пространствен обем, но вечна. Уравнението на Фридман във вселена с вещество, кривина и космологична константа

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{R^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{R^2} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (6.24)$$

поражда модели с интересно поведение на мащабния фактор, в зависимост от стойностите на $\Omega_{m,0}$ и $\Omega_{\Lambda,0}$. При $\Omega_{m,0} > 0$ и $\Omega_{\Lambda,0} > 0$, първият и третият член отдясно са положителни, докато вторият може да бъде както положителен, така и отрицателен. При $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} > 1$, положително H^2 ще имаме при малки (преобладаване на веществото) и при големи мащабни фактори (преобладаване на космологичната константа), а междуинният нефизически интервал на R означава забранени стойности на мащабния фактор ($H^2 < 0$). Подобна вселена може да започне да се свива ($H < 0$) от състояние с ниска плътност ($R \gg 1$) и да достигне минимална стойност на мащабния фактор R_{\min} при нулиране на дясната страна на ур. 6.24 и после да се разширява: т.нар. “Голям отскок” (Big Bounce), без да е започната от Голям взрив ($R(t=0)=0$). При друга, точно определена комбинация на $\Omega_{m,0}$ и $\Omega_{\Lambda,0}$ се реализира т.нар. “забавена вселена” (вселена на Lemaître), която започва със стадий на преобладаване на веществото ($R \propto t^{2/3}$), после навлиза в квазистатичен стадий на забавяне с $R \approx \text{const}$, а по-късно преобладава космологичната константа и разширението е експоненциално.

Общото поведение на мащабния фактор $R(t)$ в зависимост от стойностите на $\Omega_{m,0}$ и $\Omega_{\Lambda,0}$ е илюстрирано на Фиг. 6.4 (вляво). В зоната на “Голямото смячване”, вселената започва от $R(t=0)=0$ и колапсира отново за крайно време t_{crunch} . В зоната на “Големия мраз”, началото отново е при $R(t=0)=0$, но разширението еечно, като $R \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. И двата типа вселени могат да бъдат както плоски, така и с положителна или отрицателна кривина. В зоната на “Големия отскок”, началният стадий е на контракция, достига се минимален мащабен фактор $R_{\min} > 0$ в момент t_{bounce} и после отново следва еечно разширение. Вселени, които лежат под границата между зоните на Големия отскок и Големия мраз са “забавени” – колкото по-близо до нея се намират, толкова по-продължителен е квазистатичният стадий.

В десния панел на Фиг. 6.4 са показани четири конкретни модела от описаниите типове, като за всеки от тях $\Omega_{m,0} = 0.3$, измерена при $R = 1$. Те не могат да



Фигура 6.4: Типове вселени с вещество и космологична константа. *Вляво:* тип еволюция, в зависимост от $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$ и кривината. Плоските вселени ($\kappa = 0$) са обозначени с прекъсната линия; *Вдясно:* еволюция на машабния фактор при четири типа вселени: “Голямо смачковане” ($\kappa = -1$, прекъсната линия), “Голям мраз” ($\kappa = 0$, пунктир), “забавена вселена” ($\kappa = +1$, прекъснато-пунктирна линия) и “Голям отскок” ($\kappa = +1$, плътна линия).

се разграничват една от друга чрез измерване на настоящата плътност на веществото и Хъбловата константа, но имат твърде различни минали и бъдещи стадии поради различните стойности на космологичната константа. Налице са убедителни наблюдателни данни, че нашата Вселена не е нито “забавена”, нито от типа “Голям отскок”. В първия случай, ние бихме измервали почти същото червено отместване $z_{LM} = 1/R_{LM} - 1$ в спектъра на галактики на съществено различни разстояния от нас. Например, при подходящия за вселена с $\Omega_{m,0} = 0.3$ машабен фактор $R_{LM} \approx 0.44$, бихме наблюдавали огромен брой галактики с $z_{LM} \approx 1.3$, но такива скучивания не се наблюдават при каквато и да е стойност на z . Ако живеехме във вселена от тип “Голям отскок”, то максималното червено отместване, регистрирано от наблюдения, би било $z_{max} = (1/R_{bounce} - 1)$ – с увеличаването на разстоянията, червеното отместване ще нараства до z_{max} , а после ще намалява, докато се смени със синьо отместване. В нашата Вселена обаче не се наблюдават галактики със синьо отместване. Изглежда, че тя е от типа “Вечен мраз” и ще се разширява вечно.

Вселена с вещество и лъчение

Както вече казахме, равнодяловост между лъчение и вещество в нашата Вселена е била налице при машабен фактор $R_{rad,m} \simeq 2.8 \times 10^{-4}$. В стадий с $R \ll R_{rad,m}$, тя се

апроксимира добре с плосък модел, съдържащ единствено лъчение, който представихме в Част 6.1. При $R \sim R_{\text{rad},m}$, Вселената се описва по-добре от плосък модел, съдържащ както лъчение, така и вещество. Тогава уравнението на Фридман се свежда до:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{\text{rad},0}}{R^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{R^3}, \quad (6.25)$$

а интегрирането му води прост израз за космологичното време като функция от мащабния фактор през тази епоха:

$$H_0 t = \frac{4R_{\text{rad},m}^2}{3\sqrt{\Omega_{\text{rad},0}}} \left[1 - \left(1 - \frac{R}{2R_{\text{rad},m}} \right) \left(1 + \frac{R}{R_{\text{rad},m}} \right)^{1/2} \right];$$

Това дава приблизително степенна зависимост на мащабния фактор от времето в граничните случаи:

$$R \approx \left(2\sqrt{\Omega_{\text{rad},0}} H_0 t \right)^{1/2}, \quad R \ll R_{\text{rad},m} \quad (6.26)$$

$$R \approx \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3}, \quad R_{\text{rad},m} \ll R \ll R_{m,\Lambda} \quad (6.27)$$

Полагайки $R = R_{\text{rad},m}$, можем да получим момента $t_{\text{rad},m}$, който разделя епохите на преобладаване на лъчението (RD) и на преобладаване на веществото (MD). За стойности $\Omega_{\text{rad},0} = 8.4 \times 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0.3$ и $H_0^{-1} = 14$ Gyr, оценката за $t_{\text{rad},m}$ сочи 47000 уг. Този твърде кратък период позволява да пренебрегнем ефектът от лъчението при пресмятане на възрастта на Вселената, особено като се вземе предвид, че несигурността на H_0^{-1} е все още голяма: около 10%.

6.3 “Модел на котния знак”

“Моделът на котния знак” е понастоящем стандартен модел в космологията, защото се съгласува чудесно с последните наблюдателни данни. Според него Вселената е пространствено плоска и съдържа лъчение, вещество и космологична константа. Стойностите на основните космологични параметри в модела са приведени в Таблица 6.2. Фотоните се осигуряват единствено от СМВ с настояща температура $T_0 = 2.725$ К. Плътността на енергията на неутринното фоново лъчение се пресмята теоретично и възлиза на 68% от тази на СМВ, ако приемем всички неутрино за релативистични. Ако неутриното има ненулева маса, то следва да бъде “прехвърлено” от лъчението към веществото при мащабен фактор $5 \times 10^{-4} \text{ eV}/(m_\nu c^2)$ (вж. уводните страници на Част 6.1). Веществото се състои от частици от бариони (протони и неutronи, към които можем да прибавим и много малък принос на електрони-

те) и небарионно тъмно вещество, с което ще се занимаем по-нататък и което има приблизително шест пъти по-голям параметър на плътността. Но основната част от параметъра на плътността на Вселената се осигурява от космологичната константа.

Таблица 6.2: Основни параметри на стандартния космологичен “модел на котния знак”.

Компоненти	
Константа на Хъбъл	$H_0 = 70 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Фотони	$\Omega_{\gamma,0} = 5.0 \times 10^{-5}$
Неутрино	$\Omega_{\nu,0} = 3.4 \times 10^{-5}$
<i>Общо лъчение:</i>	$\Omega_{\text{rad},0} = 8.4 \times 10^{-5}$
Барионно вещество	$\Omega_{\text{bar},0} = 0.04$
Тъмно вещество	$\Omega_{\text{DM},0} = 0.26$
<i>Общо вещество:</i>	$\Omega_{m,0} = 0.30$
<i>Космологична константа</i>	$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.70$

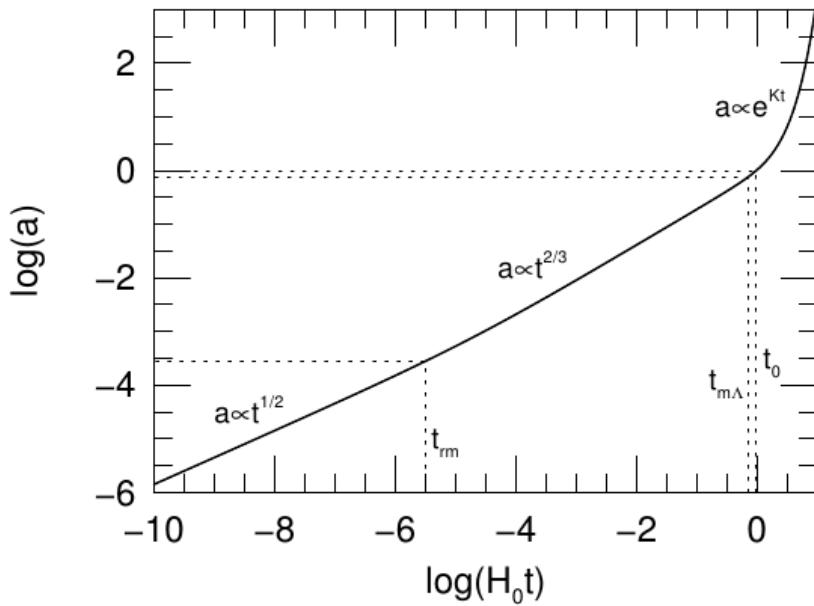
Важни епохи		
RD \rightarrow MD	$R_{\text{rad},m} = 2.8 \times 10^{-4}$	$t_{\text{rad},m} = 4.7 \times 10^4 \text{ yr}$
MD \rightarrow Λ D	$R_{m,\Lambda} = 0.75$	$t_{m,\Lambda} = 9.8 \text{ Gyr}$
Настояща	$R_0 = 1$	$t_0 = 13.5 \text{ Gyr}$

Като използваме стойностите на параметрите на плътността на основните компоненти, можем да пресметнем мащабния фактор като функция на времето от уравнението на Фридман, приведено във вида (6.14). Еволюцията на мащабния фактор е показана на Фиг. 6.5. Ще отбележим плавния преход от RD-стадия ($R \propto t^{1/2}$) към MD-стадия ($R \propto t^{2/3}$), както и от MD-стадия към стадий с преобладаваща космологична константа. Настоящият космологичен момент е много близък до втория преход.

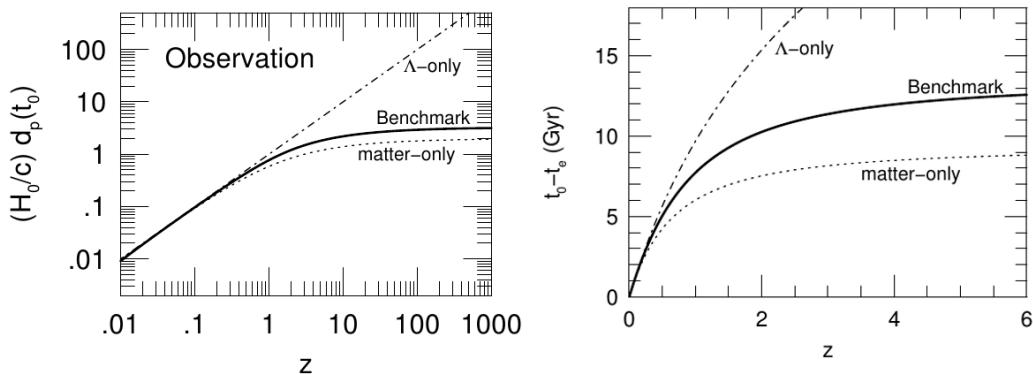
Фигура 6.6 онагледява действителното разстояние до обект с червено отместване z и времето назад, изтекло от момента на емисия до настоящия t_0 , според Стандартния космологичен модел. В граничния случай $z \rightarrow \infty$ действителното разстояние $D_p(t_0)$ клони към разстоянието до хоризонта:

$$D_{\text{hor}} = 3.24c/H_0 = 14 \text{ Gpc} ; \quad (6.28)$$

Що се отнася до времето назад, то е $\approx z/H_0$ на много малки червени отмествания $z \ll 1$ и се изменя нелинейно на големи z , като точната зависимост се определя от възприетия космологичен модел. Затова точното познаване на $\Omega_{m,0}$ и $\Omega_{\Lambda,0}$ е от изключителна важност при изучаването на еволюцията на галактиките. С уточня-



Фигура 6.5: Еволюция на мащабния фактор в Стандартния модел.



Фигура 6.6: Зависимост на действителното разстояние (вляво) и на времето назад (вдясно) от червеното отместване в Стандартния модел (плътна линия). За сравнение е показано поведението на вселени с единствена компонента вещества (пунктир) или космологична константа (прекъснато-пункирна линия).

ването на параметрите на Стандартния космологичен модел в бъдеще, ние ще бъдем в състояние да превръщаме наблюдаваното червено отместване в изтекли времена с голяма прецизност. Едни от най-отдалечените галактики, наблюдавани понастоящем, имат отместване $z \approx 6$. В Стандартния космологичен модел, това дава действително разстояние до тях $D_p(t_0) \approx 8.3$ Gpc или 60% от разстоянието до хоризонта. Действителното разстояние до тези обекти в момента на излъчването пък е било $D_p(t_e) \approx (1/(1+z))8.3 = 1.2$ Gpc, а времето, изтекло от t_e досега е около 93% от възрастта на Вселената или 12.6 Gyr.

Глава 7

Космологични епохи и космологичен нуклеосинтез

7.1 Космологични епохи в ранната Вселена

Изследването на СМВ ни разкрива подробности относно състоянието на Вселената към момента на последното разсейване на лъчението ($t_{ls} \approx 0.35$ Myr). По-ранни етапи са ненаблюдаеми поради голямата непрозрачност. Както вече видяхме (...), такива ранни етапи от вселенската еволюция се характеризират със силно доминиране на лъчението и при мащабен фактор $R \ll 2.8 \times 10^{-4}$ могат да се опишат от уравнение $R(t) \propto t^{1/2}$. Тогава температурата на чернотелното лъчение, която е обратно пропорционална на мащабния фактор (ур. 3.8), зависи от космологичното време като $T(t) \propto t^{-1/2}$. Точната зависимост, изведена в еднокомпонентен модел на Вселена, изпълнена само с лъчение, е:

$$T(t) \approx 1.81 \times 10^{10} g_*^{-1/4} \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2} [\text{K}] \Leftrightarrow k_B T(t) \approx g_*^{-1/4} \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2} [\text{MeV}], \quad (7.1)$$

където ефективният брой степени на свобода на всички съществуващи частици (бозони b и фермиони f) при температура T се задава от формулата:

$$g_* = \sum_b g_b + \frac{7}{8} \sum_f g_f \left(\frac{T_\nu}{T} \right)^4; \quad (7.2)$$

Основните елементарни частици със значение за ранната еволюция на Вселената приведохме в Таблица 3.1. Факторът $(T_\nu/T)^4$ се отнася само за неутриното, и то при температури, за които то излиза от равновесие ($k_B T \approx 3$ MeV). Ефективният брой степени на свобода варира в рамките на два порядъка, но участва на степен 1/4 в ур. (7.1) и не оказва съществено влияние на оценките. Понастоящем $g_* = 3.363$, с

приноса на фотони и на три вида неутрино/антинеутрино. Преди излизане на неутриното от равновесие и при температури под ~ 100 MeV, единствените допълнителни релативистични частици са били електроните и позитроните и $g_* = 10.75$. При още по-високи температури адроните се дисоциират на кварки и глюони и g_* нараства още. Най-сетне, при $k_B T \sim 300$ GeV, всички частици от Стандартния модел са били релативистични, което дава $g_* = 106.75$.

Средната енергия на фотона в момент t е била:

$$\overline{E}_\gamma(t) = 2.7 k_B T(t) \approx 3 g_*^{-1/4} \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2} [\text{MeV}]; \quad (7.3)$$

С охлаждането на Вселената от Планковото време t_P до настоящия момент t_0 , средната енергия на фотоните спада драстично от $\overline{E}_\gamma(t_P) = 1.2 \times 10^{28}$ eV до $\approx 5 \times 10^{-4}$ eV. При високите температури на ранната Вселена, енергията на топлинните фотони е била достатъчна за раждането на двойки частици-античастици от всевъзможен сорт. Ако $E_\gamma(t)$ надвишава масата на покой на съответната частица, такива двойки непрекъснато се раждат и изчезват, като в зависимост от $T(t)$ се стига до равновесни съотношения на частиците. Необходимото време за постигане на равновесие е, най-общо казано, обратно пропорционално на температурата и плътността на средата. С разширяването и охлаждането на Вселената, условията за раждане и анихиляция на частици се изменяли. Ако интервалът от температури, необходим за протичането на реакции от определен тип, съответствал на период от време, по-голям от характерното време на реакциите, се постигало равновесие. Когато това условие не е изпълнено, съответният сорт частици излиза от равновесие.

И така, според стойността на $E_\gamma(t)$, можем да разгранишим няколко основни космологични епохи (Таблица 7.1), които се характеризират с преобладаване на различен вид частици, намиращи се в равновесие с лъчението:

- *Много ранна Вселена:* Така обикновено се нарича ерата с температури над 10^{11} eV ($t < 10^{-11}$ s), но по-малки от Планковата енергия $E_P = 1.2 \times 10^{28}$ eV ($t \simeq 10^{-43}$ s). Долната времева граница на тази епоха представлява Планковото време t_P – за моменти $t \leq t_P$ трябва да влезе в сила все още несъздадената “теория на всичко” (Theory Of Everything, TOE), която да опише съгласувано всички физически аспекти на Вселената в обща рамка. Физическото състояние на много ранната Вселена в интервала $t_P \lesssim t \lesssim t_{\text{GUT}} \sim 10^{-36}$ s попада в обхвата на “теориите на Великото обединение” (Grand Unification Theories, GUT), обединяващи силното и електрослабото взаимодействие. Едно от предсказанията на GUT е, че когато температурата е паднала под $T_{\text{GUT}} \sim 10^{28}$ K, Вселената е претърпяла фазов преход, свързан със спонтанно нарушение на симетрията

и разделяне на силното от електрослабото взаимодействие. Предполага се, че приблизително в същия момент е протекъл краткотраен¹ инфлационен стадий на експоненциално разширение на Вселената. Следващо спонтанно нарушение на симетрията е станало при $T_{ew} \sim 10^{15}$ K, когато електромагнитното взаимодействие се разделя от слабото.

- *Кваркова епоха:* Вселената е изпълнена с плътна и гореща кварк-глюонна плазма. Отделената при удари между частиците енергия е твърде голяма, което не дава възможност кварките да образуват мезони или бариони. Протичат реакции на раждане и анихилация на двойки кварк-антикварк

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons q + \bar{q} ,$$

като броят на горните кварки и антикварки, долните кварки и антикварки и на фотоните е приблизително един и същ. За да се обясни наблюдаваната днес барионна асиметрия на Вселената, се предполага, че в тази епоха е възникнала нищожно малка асиметрия между кварки и антикварки

$$\delta_q \equiv \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q + n_{\bar{q}}} \ll 1 , \quad (7.4)$$

чиито възможен физически механизъм сега няма да обсъждаме. При възраст $t \sim 10^{-5}$ s, температурата пада под $kT \sim 150$ MeV, което съответства на енергията на свързване на адроните. Съществуващите антикварки анихилират с кварките, но поради наличието на асиметрията (7.4) остава малко количество кварки $n_q/n_\gamma \sim \delta_q$, които се свързват в адрони. Съвременните наблюдателни оценки сочат съотношение бариони към фотони $n_B/n_\gamma \sim 5 \times 10^{-10}$. Така започва

- *Адронна епоха:* Първоначално температурата е достатъчно висока, за да позволи раждането на двойки адрони-антиадрони, което поддържа веществото и антивеществото в топлинно равновесие. Продължаващото охлаждане води до излизане на този процес от равновесие. Огромната част от двойките адрони-антиадрони анихилират, тежките адрони впоследствие се разпадат. Остават малко протони и неutronи, потопени в лептонен океан. При възраст $t \sim 10^{-4}$ s Вселената влиза в своята
- *Лептонна епоха:* Протичат реакции на превръщане на протони в неutronи и обратно, при постоянното им (слабо) взаимодействие с лептони. При понататъшно намаляване на температурата, реакциите на раждане на лептони

¹ С продължителност около $100 H^{-1}$, като Хъбловият параметър в този стадий е бил $t_{GUT}^{-1} \approx 10^{36} \text{ s}^{-1}$

също излизат от равновесие. Първи анихилират ν_μ и ν_τ , докато ν_e престава да взаимодейства с останалите частици и – понеже са устойчиви частици – се разпространяват свободно от този космологичен момент насетне, под формата на фоново неутринно лъчение. Малкото ν_μ и ν_τ , останали след анихилацията, се разпадат до електрони.

По-късно и леките електрони излизат от равновесие, анихилирайки с позитроните, с изключение на малкото количество вещество, възникнало след инфлационния стадий. По закона за запазване на електричния заряд във Вселената, техният брой е бил равен на този на протоните. Тъй като неutronите са малко по-тежки от протоните, вероятността за реакция на превръщане $n \rightarrow p$ е била малко по-голяма, което обуславя нарастване на броя на фотоните, и към края на лептонната ера, при $t \sim 10$ s, съотношението n_n/n_p е било приблизително 1:5. (В следващата Част ? ще обосновем това по-подробно.) Междувременно са започнали някои от реакциите на космологичния нуклеосинтез. При нищожната стойност на n_B/n_γ , малкото ядра вещество са примесени в огромен океан от високоенергетични фотони. Започва

- *Радиационна епоха (RD):* В ранния стадий на тази ера протича основно космологичният нуклеосинтез, който ще разгледаме по-долу. При достигане на температури, достатъчно по-ниски от енергията на свързване на деутерия (~ 2 MeV; $t \sim 2$ min), протони и неutronи започват да се свързват поради силното взаимодействие. Образува се деутерий ($^2\text{H} \equiv \text{D}$), чието ядро обаче не е особено стабилно и затова в голямата си част впоследствие се разпада. Поради краткото време на живот на свободните неutronи, към $t \sim 3$ min част от тях са се разпаднали на протони и електрони. Впоследствие започват да възникват по-стабилните ядра на хелия и към края на космологичния нуклеосинтез ($t \sim 5$ min) се достига равновесен химичен състав на Вселената $X = 0.76$, $Y = 0.24$, с нищожни остатъчни количества на деутерий, ^3He и ^7Li . Този състав няма да се промени в продължение на стотици Муг, докато първите звезди не започнат да произвеждат и изхвърлят в околната среда тежки елементи. При по-нататъшното охлаждане на разширяващата се Вселена дялът на веществото в нейната енергийна плътност нараства и към $t \sim 10\,000$ уг започва
- *Епоха на преобладаване на веществото:* Тя продължава милиарди години, съгласно сегашния “Модел на котния знак”. Едно важно събитие в нейния ранен стадий е космологичната рекомбинация. Около 300 000 години след Големия взрив, температурата пада до едва $\sim 3\,000$ K и фотоните вече имат средна енергия под потенциала на ионизация на водородния атом 13.6 eV. Образуват

се неутрални водородни атоми, а отделените фотони се разпространяват от тук насетне свободно – Вселената “просветва”. Това е най-ранният момент в еволюцията на Вселената, от който можем да получим пряка наблюдателна информация (CMB). Малката анизотропия на СМВ показва, че на този стадий вече има едромащабни флуктуации на плътността (сгъстявания), от които по-късно ще възникнат галактиките.

Но до възникването на първите звезди ($t \sim 400$ Myr) има още много време. Започват космологичните “тъмни векове” (dark ages).

Таблица 7.1: Космологични епохи в ранната Вселена.

Наименование	Възраст	Температура [$k_B T$]
<i>Планкова ера</i> (\rightarrow ТОЕ)	$< 5 \times 10^{-44}$ s	$> 10^{19}$ GeV
<i>Много ранна Вселена</i>	$5 \times 10^{-44} - 10^{-11}$ s	100 GeV
• GUT стадий	$5 \times 10^{-44} - 10^{-36}$ s	$10^{19} - 10^{15}$ GeV
• Инфлационен стадий	$10^{-36} - 10^{-34}$ s	10^{15} GeV
• Стадий на електрослабо вз-вие	$10^{-34} - 10^{-11}$ s	$10^{15} - 100$ GeV
<i>Кваркова епоха</i>	$10^{-11} - 10^{-5}$ s	100 GeV – 200 MeV
<i>Адронна епоха</i>	$10^{-5} - 10^{-4}$ s	200 MeV
<i>Лептонна епоха</i>	$10^{-4} - 10$ s	200 – 0.1 MeV
• Отделяне на неутриното	1 s	0.8 MeV
• Позитрон-електронна анихилация	1.3 s	0.5 MeV
<i>Радиационна епоха</i>	$10 \text{ s} - 10^4 \text{ yr}$	< 0.1 MeV
“ <i>Тъмни векове</i> ”	$10^4 - 4 \times 10^6$ yr	

7.2 Съотношение протони-неutronи

Космологичният нуклеосинтез очевидно е бил твърде неефективен. От енергетична гледна точка, с оглед на енергията на свързване на различните елементи, барионното съдържание на Вселената би трябвало да бъде смес от желязо и никел. Понастоящем обаче, $3/4$ от масата на веществото все още се падат на несвързани протони (водородни ядра), а най-разпространеното по-тежко ядро е ${}^4\text{He}$. Обикновено първичното масово съдържание на хелия се изразява чрез нормиране на плътността на хелия към тази на всички бариони:

$$Y_p \equiv \frac{\rho({}^4\text{He})}{\rho_B} \quad (7.5)$$

Слънчевото съдържание на хелий е $Y_{\odot} = 0.28$, но веществото в нашата най-близка звезда е било допълнително обогатено от продукцията на първите звезди. От наблюдения на различни космически обекти е получена минимална стойност $Y = 0.24$, която може да се приеме като оценка в първо приближение на първичното съдържание на хелий.

Енергията на покой на неutrona и на протона, основните участници в нуклеосинтеза, се различават с $Q_n = (m_n - m_p)c^2 = 1.29 \text{ MeV}$. Свободният неutron е нестабилен и се разпада чрез реакцията $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$, с време на разпад $\tau_n = 890 \text{ s}$. Това означава, че броят на свободните неutronи намалява за време t с фактор $f = \exp(-t/\tau_n)$. Остатъкът от освободената енергия $Q_n > m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ се превръща в кинетична енергия на електрона и на антинеутриното. Когато Вселената е достигнала възраст от няколко часа, свободни неutronи вече няма – оцеляват само тези, които вече са били свързани в атомни ядра.

Нека разгледаме физическото състояние на Вселената при възраст $t = 0.1 \text{ s}$, със стойности на температурата и на средната енергия на фотона съответно $T \approx 3 \times 10^{10} \text{ K}$ и $\bar{E}_{\gamma} \approx 10 \text{ MeV}$. Такава енергия е много по-голяма от енергията на покой на електроните и позитроните, които са в равновесни количества чрез реакции на раждане и анихиляция. Съотношението протони-неutronи също е постоянно поради взаимодействията



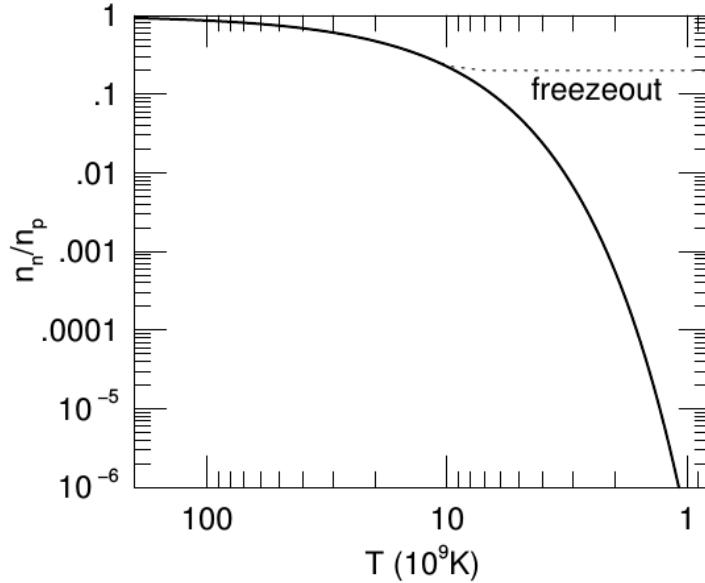
а концентрациите им се задават от разпределението на Максуел-Болцман:

$$n_{\text{nucl}} = g_{\text{nucl}} \left(\frac{m_{\text{nucl}} k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_{\text{nucl}} c^2}{k T} \right)$$

Статистическите тегла на неutronите и протоните са равни ($g_n = g_p = 2$), а отношението на масите им е близо до единица ($(m_n/m_p)^{3/2} = 1.002$), така че за отношението на концентрациите им можем да запишем:

$$\frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_n - m_p)c^2}{k T} \right) \approx \exp \left(- \frac{Q_n}{k T} \right) ; \quad (7.8)$$

При температури $kT \gg Q_n = 1.29 \text{ MeV}$ ($T \gg 1.5 \times 10^{10} \text{ K}$) броят на неutronите и на протоните е приблизително един и същ. Щом се достигне обаче граничната стойност на T , равновесието между реакциите от ур. 7.6 се нарушава в полза на протоните и съотношението (7.8) намалява експоненциално (Фиг. 7.1). Ако реакциите (7.6) продължаваха да протичат при същите условия, при възраст $t = 6 \text{ min}$ съотношени-



Фигура 7.1: Еволюция и “замръзване” на отношението неутрони/протони.

ето n_n/n_p би спаднало до 10^{-6} . За щастие, участващото в тях (анти)неутрино скоро излиза от равновесие с останалото вещества поради температурната зависимост на сечението на слабото взаимодействие $\sigma_w \propto T^2$, което за неутриното е:

$$\sigma_{w,\nu} = 10^{-47} m^2 \left(\frac{kT}{1 \text{ MeV}} \right)^2; \quad (7.9)$$

Предвид зависимостите на температурата от възрастта на Вселената $T(t) \propto t^{-1/2}$ и на концентрацията на неутриното от машабния фактор $n_\nu \propto R(t)^{-3} \propto t^{-3/2}$, темпът Γ на реакциите на протоните и неutronите с неутриното е силно чувствителен към възрастта:

$$\Gamma = n_\nu c \sigma_{w,\nu} \propto t^{-3/2} t^{-1} = t^{-5/2};$$

Междувременно, Хъбловият параметър намалява обратно пропорционално на времето и когато $\Gamma \approx H$, неутриното се отделя от нуклоните и съотношението неутрони/протони “замръзва”, докато неutronите не започнат да се разпадат ($t \sim \tau_n$). По съвременни лабораторни данни за сеченията на слабо взаимодействие на протони и неutronи тази “температура на замръзване” се оценява на $T_{\text{freeze}} = 9 \times 10^9$ К ($kT = 0.8$ MeV), тогава отношението неутрони/протони ще се стабилизира на стойност:

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp \left(- \frac{Q_n}{kT_{\text{freeze}}} \right) \approx \exp \left(- \frac{1.29 \text{ MeV}}{0.80 \text{ MeV}} \right) \approx 0.2; \quad (7.10)$$

Тъкмо недостигът на неutronи обяснява неефективността на космологичния нуклеосинтез: фактът, че $3/4$ от протоните остават несвързани. Свързването на неutron

с протон става с много по-голяма вероятност, отколкото между два протона. Вторият случай е реакция на слабото взаимодействие $p(p, e^+ \nu_e)D$, с нищожно сечение² от порядъка на σ_w , а при това двата протона трябва да преодолеят и Кулоновия барьер помежду си. Последното се случва благодарение на тунелни преходи, каквито протичат в недрата на звездите. В ранната Вселена обаче температурата и плътността падат бързо ($T \propto t^{-1/2}$, $n_B \propto t^{-3/2}$) и това определя благоприятни условия за нуклеосинтез в рамките на по-малко от един час.

От друга страна, $p(n, \gamma)D$ е реакция на силно взаимодействие, която протича значително по-охотно. Така космологичният нуклеосинтез продължава, докато всеки свободен неutron се свърже в атомно ядро, а останалите протони остават свободни. Тогава лесно можем да оценим максималната възможна стойност на космологическо то масово съдържание на хелия Y_p . Ако предположим, че понастоящем всеки неutron е свързан в ядро на ${}^4\text{He}$, след “замръзване” на съотношението неutronи/протони на $n_n/n_p = 1/5$, то от група от 2 неutronа и 10 протона, ще се образува едно хелиево ядро, а 8 протона ще останат несвързани. Следователно:

$$Y_{\max} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad (7.11)$$

Наблюдателната оценка $Y_p = 0.24$ е уверено под Y_{\max} , като причината може да се припише на различни фактори:

- Ако нуклеосинтезът не е протекъл непосредствено след “замръзването” на n_n/n_p ($t \approx 1$ s), спонтаният разпад на неutronите неминуемо ще намали това отношение, а оттук и дяла на космологичния хелий.
- Ако някои неutronи не се сливат или биват свързани в по-леки ядра като D или ${}^3\text{He}$.
- Най-сетне, ако нуклеосинтезът е достатъчно продължителен, за да възникнат ядра, по-тежки от ${}^4\text{He}$.

Точното пресмятане на Y_p , както и на количествата на останалите изотопи, изиска по-подробно разглеждане на процесите на термоядрен синтез.

7.3 Синтез на деутерий и на по-тежки ядра

И така, първата основна реакция при космологичния нуклеосинтез е образуването на деутерий $p(n, \gamma)D$, с енергия на освободения фотон, равна на енергията на свързване

² Същото се отнася и за сливането на два неutronа: $n(n, e^- \tilde{\nu}_e)D$.

$Q_D = (m_p + m_n - m_D)c^2 = 2.22$ MeV. При равновесие между правата и обратната реакция съотношението между количествата на деутерий, протоните и неutronите ще се определя от уравнение, аналогично на уравнението на Саха:

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = \frac{g_D}{g_p g_n} \left(\frac{m_D}{m_p m_n} \right)^{3/2} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp \left(\frac{[m_p + m_n - m_D]c^2}{kT} \right) = 6 \left(\frac{m_n kT}{\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp \left(\frac{Q_D}{kT} \right),$$

където вземаме предвид, че $g_p = g_n = 2$, $g_D = 3$, а $m_p = m_n = m_D/2$ с достатъчна степен на точност. Очевидно производството на деутерий има превес в границата $kT \rightarrow 0$, а на протони и неutronи – при $kT \rightarrow \infty$. Сега можем да дефинираме точната температура T_{nuc} , при която половината неutronи са свързали в ядра на деутерий ($n_D/n_n = 1$), а концентрацията на протоните да изразим чрез тази на фотоните и съотношението $n_B/n_\gamma \simeq 5 \times 10^{-10}$. Получаваме уравнение за T_{nuc} :

$$1 \approx \frac{n_D}{n_n} = 6 \times 5 \times 10^{-10} n_\gamma(T_{\text{nuc}}) \left(\frac{m_n k T_{\text{nuc}}}{\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} \exp \left(\frac{Q_D}{k T_{\text{nuc}}} \right) \propto T_{\text{nuc}}^{3/2} \exp \left(\frac{Q_D}{k T_{\text{nuc}}} \right);$$

Решението дава $T_{\text{nuc}} \approx 7.8 \times 10^8$ K, която се достига при възраст на Вселената около $t \approx 200$ s. Стойността е сравнима с времето на разпад на неutronа $\tau_n = 890$ s и не е трудно да се покаже, че когато нуклеосинтезът вече е започнал, отношението n_n/n_p е спаднало:

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \frac{\exp(200/890)}{4 + (1 - \exp(200/890))} \approx 0.15,$$

което пък води до намаляване на максималното количество космологичен хелий до $Y_{\text{max}} = 0.27$.

Отношението n_D/n_n не се определя задълго от правата и обратната реакции на сливането на протони и неutronи. Образуваният деутерий бързо влиза в следващи реакции с протони и неutronи:



Ядрото на трития е неустойчиво, но с период на разпад 18 уг, което не е от значение предвид кратката продължителност на космологичния нуклеосинтез. Други възможни реакции са сливания на ядра на деутерий:



като последните две реакции протичат с по-голяма вероятност.

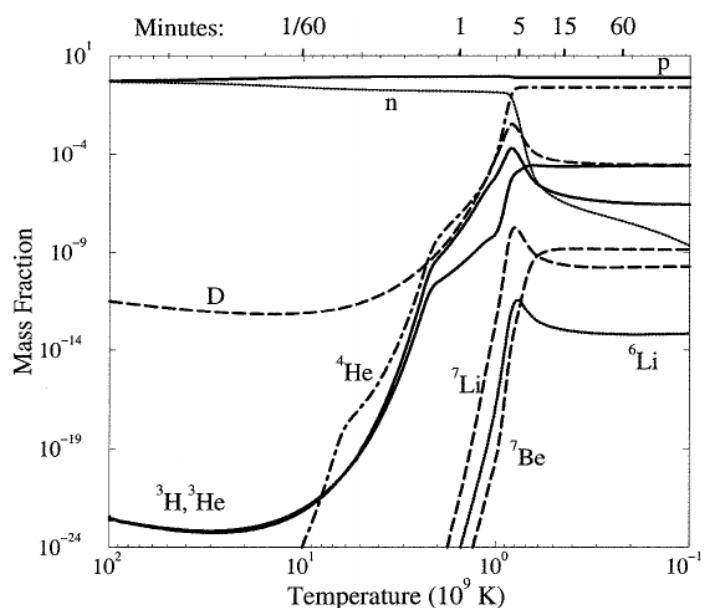
На свой ред ядрата ^3H и ^3He встъпват в следващи реакции, водещи до възникване на ядра на ^4He :



Това са силни взаимодействия с големи сечения и протичащи с висока скорост. Затова започналият нуклеосинтез води до ефективно преобразуване на ядрата D, ^3H и ^3He в ^4He . Това ядро, макар и леко, е с голяма енергия на свързване, докато ядра с $A = 5$ не са устойчиви. Ето защо ^4He не реагира охотно с неutronи и протони. Малки количества от изотопи на лития, както и ^7Be , възникват чрез реакции:



Синтезът на ядра с $A > 7$ е възпрепятстван от липсата на стабилно ядро с $A = 8$; например, едно ядро ^8Be има време на разпад (на две хелиеви ядра) от едва 3×10^{-16} s. Точните космологични количества на различните изотопи могат да се пресметнат чрез сложни кодове, отчитащи немалък брой възможни реакции след възникването на деутерий, които без изключение имат температурно зависими сечения на взаимодействие. Резултатите от такъв типичен код са онагледени на Фиг. 7.2. Вижда се, че деутерият повишава съдържанието си до образуването на съществени количества ^3H , ^3He и ^4He . След като температурата спадне до 4×10^8 K, при възраст на Вселената $t \sim 10$ min, нуклеосинтезът на практика е приключил – всички бариони са под формата на свободни протони или ядра на ^4He .



Фигура 7.2: Масови съдържания на различни изотопи като функции на времето в епохата на космологичен нуклеосинтез.

Приложение А: Използвани съкращения

OTO	Обща Теория на Относителността
CMB	Cosmic Microwave Background
COBE	COsmic Background Explorer
GUT	Grand Unification Theories
IGM	InterGalactic Medium
LINERs	Low-Ionization Nuclear Emission-line Regions
LOFAR	LOw Frequency ARray
OGLE	Optical Gravitational Lensing Experiment
PNe	Planetary Nebulae
QSO	Quasi-Stellar Object
SED	Spectral Energy Distribution
SMBH	SuperMassive Black Hole
TOE	Theory Of Everything
WIMPs	Weakly Interacting Massive Particles
WMAP	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

Приложение Б: Кратка хронология на космологията

- 1920 Слайфер (Slipher) установява червени отмествания в галактичните спектри.
- 1923 Едуин Хъбъл (Hubble) доказва, че галактиките не са обекти от Млечния път.
- 1926 Хъбъл показва хомогенността на Вселената на големи мащаби въз основа на извадка от 400 галактики.
- 1929 Хъбъл открива линейна зависимост между разстоянието до дадена галактика и радиалната ѝ скорост (закон на Hubble).
- 1946 Откриване на първия извънгалактичен радиоизточник Cygnus A (J. Hey, S. Parsons и J. Phillips).
- 1946 Гамов (Gamov) публикува първото теоретично изследване на космологичния нуклеосинтез.
- 1965 Пензиас (Penzias) и Уилсън (Wilson) откриват реликтовото космическо лъчение, което се явява пряко доказателство на Теорията за Големия взрив.
- 1992 Първо детектиране на анизотропия в СМВ, въз основа на данни от сателита COBE.
- 1998 Наблюдения на отдалечени свръхнови от тип Ia (Supernova Cosmology Project, High-Z Supernova Search Team) подкрепят модела на ускорително разширяваща се Вселена.